

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Распространение и дифракция электромагнитного поля	7
1.1. Уравнения Максвелла. Волновое уравнение и уравнение Гельмгольца	7
1.2. Параболическое уравнение и преобразование Френеля	11
Глава 2. Структурно устойчивые решения параболического уравнения	17
2.1. Специальные функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса	17
2.2. Целые аналитические функции, порядок роста и структурный вид световых полей	19
2.3. Пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса, их свойства при распространении и фокусировке	31
Глава 3. Интегральные преобразования структурно устойчивых решений параболического уравнения	34
3.1. Астигматическое преобразование, связывающее функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса	34
3.2. Теоремы об инвариантности и преобразование Лоренца	48
Глава 4. Функции Эрмита–Лагерра–Гаусса и их свойства	57
4.1. Определение и простейшие свойства функций Эрмита–Лагерра–Гаусса	57
4.2. Конечные суммы, функции Вигнера и оператор вращения в трехмерном пространстве	67
4.3. Интегральные преобразования функций Эрмита–Лагерра–Гаусса	76
4.4. Энергия, угловой момент и другие интегральные инварианты	88
Глава 5. Спиральные пучки света — новый класс автомодельных решений параболического уравнения	96
5.1. Постановка задачи о световых полях, вращающихся при распространении	96
5.2. Структурный вид вращающихся световых полей	98

5.3. Основные уравнения и параметры решений	100
5.4. Спиральные пучки и их квантово-механические аналоги	103
5.5. Экспериментальная реализация спиральных пучков	113
Глава 6. Спиральные пучки с заданным распределением интен- сивности	119
6.1. Спиральные пучки в форме плоских кривых	119
6.2. Замкнутые плоские кривые и условие квантования. Свойства спи- ральных пучков	127
6.3. Угловой момент спиральных пучков	151
Глава 7. Синтез фазовых элементов	164
7.1. Задача фокусировки лазерного излучения в плоские кривые	164
7.2. Задача фокусировки лазерного излучения в область заданной формы	174
Заключение	177
Список литературы	180

Предисловие

Классические гауссовы пучки — это световые поля, распределение амплитуды которых в поперечном сечении описывается функциями Эрмита–Гаусса (ЭГ) и Лагерра–Гаусса (ЛГ). Такие пучки, являясь параксиальным приближением реальных световых полей, хорошо описывают свойства многих лазерных световых пучков и собственные типы колебаний устойчивых открытых резонаторов. Однако, за последние 10–15 лет были получены, во-первых, новые свойства уже известных пучков ЭГ и ЛГ и, во-вторых, найдены новые семейства лазерных пучков, являющиеся модами некоторых резонаторов и заслуживающие самостоятельного рассмотрения, в частности, т. н. спиральные пучки. Получен также ряд новых результатов, касающихся различных свойств световых пучков: ротора вектора потока световой энергии, углового момента и ряда других. Насколько известно авторам, данные результаты не нашли отражения в литературе. Восполнение этого пробела и составляет основную задачу данной книги.

Структура книги такова.

В первой главе приводятся необходимые результаты волновой оптики и основы теории дифракции. Материал изложен кратко, т. к. эти вопросы отражены во многих учебниках и монографиях по оптике, однако, он является необходимым для цельности изложения.

Во второй главе описана оптика т. н. гауссовых пучков — пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Эти световые поля сохраняют свою структуру при распространении и фокусировке и являются традиционным инструментарием при исследовании свойств линзовых волноводов, резонаторов и квадратичных сред.

В третьей главе исследуется поведение гауссовых пучков при астигматических воздействиях. Теоретически показано, что определенные астигматические оптические системы осуществляют взаимное преобразование пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Доказана теорема о пучках, структурно устойчивых к астигматизму, а именно: световое поле, устойчивое к астигматическому воздействию определенного вида, преобразуется в радиально симметричное по интенсивности при астигматическом воздействии, повернутом относительно исходного на угол $\pi/4$. Найден и реализован экспериментально параметрический класс световых полей — обобщенных пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса, описываемый полной системой ортогональных функций, зависящих от параметра, причем известные пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса являются его частными представителями. Приводится описание оптических схем, реализующих преобразование пучков Эрмита–Гаусса в пучки Лагерра–Гаусса и результаты соответствующих экспериментов.

В четвертой главе изучаются свойства вектора потока световой энергии. Показано, что поле потока световой энергии в общем случае имеет вихревую компоненту и, соответственно, ненулевой ротор. Найдена интегральная связь между ротором и угловым моментом светового

поля. Доказано свойство сохранения ротора при распространении светового поля и его связь с фазовыми сингулярностями.

В пятой главе в параксиальном приближении ставится и решается задача поиска световых полей, сохраняющих свою структуру при распространении и фокусировке с точностью до масштаба и вращения. Приводится полное описание таких световых полей, названных спиральными пучками, законы их распространения и вращения. Рассмотрена связь спиральных пучков с квантовой механикой. Показано, что спиральные пучки являются модами специфических резонаторов с вращением поля. Описаны способы экспериментальной реализации спиральных пучков.

Шестая глава посвящена методам синтеза структурно устойчивых при распространении световых полей с заданным распределением интенсивности. Как частный случай спиральных пучков получены световые поля, распределение интенсивности которых имеет форму произвольной плоской кривой. Исследованы свойства спиральных пучков для построенных замкнутых кривых. Установлено, что такие пучки проявляют характерные свойства квантования: во-первых, распределение интенсивности претерпевает радикальное изменение при преобразованиях подобия соответствующей кривой и обладает формой этой кривой лишь при определенных значениях коэффициента подобия; во-вторых, для этих же значений коэффициента подобия площадь под кривой пучка связана с гауссовым параметром определенным целочисленным соотношением, при этом число фазовых сингулярностей спирального пучка внутри кривой также квантуется и их число определяется только площадью области, ограниченной кривой, но не ее формой.

В седьмой главе приводятся результаты применения оптики спиральных пучков к задаче синтеза фазовых дифракционных оптических элементов для фокусировки светового поля в плоскую кривую и двумерную область заданной формы. Предложен новый итеративный метод для решения этой задачи. Метод основан на использовании фазового распределения спирального пучка в ближней зоне и его распределения интенсивности в дальней зоне в качестве начальных приближений при синтезе соответствующих фазовых дифракционных оптических элементов. Приведены результаты численных и натурных экспериментов.

Значительная часть книги является основой курса лекций «Оптика гауссовых пучков», который читается одним из авторов студентам Самарского государственного университета, и мы полагаем, что книга будет полезна и студентам других вузов, специализирующимся на лазерных технологиях.

Выражаем глубокую благодарность сотрудникам СФ ФИАН Н.Н. Лосевскому, Е.В. Разуевой и К.Н. Афанасьеву, результаты совместных работ с которыми нашли отражение в книге, а также Т.Ю. Давидовской, С.П. Котовой, В.В. Самарцеву и А.Л. Петрову за поддержку и внимание к работе.

Глава 1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В данной главе кратко изложены основы теории дифракции, рассмотрены уравнения Максвелла и Гельмгольца применительно к задачам оптики. Получено параболическое уравнение и показана его связь с преобразованием Френеля.

1.1. Уравнения Максвелла. Волновое уравнение и уравнение Гельмгольца

При описании светового поля будем исходить из уравнений Максвелла. Они подробно рассмотрены в учебниках по электромагнетизму, поэтому здесь достаточно лишь сформулировать их. Итак, вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектор электрической индукции \mathbf{D} связаны с вектором напряженности магнитного поля \mathbf{H} и вектором индукции \mathbf{B} следующими уравнениями:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Электрические векторы связаны друг с другом так называемым материальным уравнением, которое описывает свойство среды, в которой волна распространяется. В общем случае эта связь может быть весьма сложной, например, если среда анизотропна. Однако, для нашего рассмотрения можно предполагать простое линейное соотношение:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

которое справедливо для линейной изотропной среды. Константа ε есть, как обычно, диэлектрическая проницаемость. Связь между \mathbf{H} и \mathbf{B} задается аналогичным соотношением:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.4)$$

где μ — магнитная проницаемость.

При отсутствии электрических зарядов вектор \mathbf{D} удовлетворяет уравнению:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (1.5)$$

Вектор же магнитной индукции всегда удовлетворяет аналогичному уравнению:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1)–(1.6) полностью описывают любое электромагнитное поле в линейной изотропной среде без токов и зарядов.

Из уравнений Максвелла многими способами можно получать уравнения, удобные для тех или иных конкретных физических ситуаций. Например, подставим (1.4) в уравнение (1.2) и применим оператор rot к обеим частям. В результате получим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \mathbf{H}). \quad (1.7)$$

Подстановка (1.1) и (1.3) в (1.7) приводит к уравнению, содержащему только вектор \mathbf{E} :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.8)$$

Ввиду того, что оператор $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ не очень удобен для применения, целесообразно воспользоваться векторным тождеством:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}, \quad (1.9)$$

где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2}$ — оператор Лапласа в декартовых координатах (x, y, l) . Здесь и далее мы будем использовать в качестве третьей декартовой координаты букву l вместо более привычной z , поскольку z нам понадобится для обозначения комплексных переменных.

Так как $\varepsilon = \text{const}$, то $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, и уравнение (1.8) переписывается в следующем виде:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.10)$$

Из курса уравнений математической физики известно, что это — волновое уравнение, причем каждая декартова компонента электрического поля удовлетворяет, соответственно, скалярному волновому уравнению вида:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (1.11)$$

где величина $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ имеет физический смысл скорости света в среде с постоянными ε и μ .

Смысл волнового уравнения становится понятным, если учесть, что любая функция вида:

$$f\left(t - \frac{1}{v} \mathbf{nr}\right) \quad (1.12)$$

удовлетворяет этому уравнению, при условии, что существуют соответствующие производные. Компоненты вектора \mathbf{r} являются координатами точки наблюдения поля, \mathbf{n} — единичный вектор.

Решение (1.12) представляет собой плоские волны, распространяющиеся в пространстве. Действительно, рассмотрим некоторое фиксированное значение аргумента:

$$u = t - \frac{1}{v}\mathbf{nr}. \quad (1.13)$$

При любом заданном значении u функция f имеет соответствующее фиксированное значение $f(u)$. Величина $u = \text{const}$ при фиксированном времени t реализуется в плоскости $\mathbf{nr} = \text{const}$. Вектор \mathbf{n} направлен перпендикулярно плоскости, и функция имеет одно значение на этой плоскости, движущейся со скоростью v .

Весьма важным частным случаем являются решения уравнения (1.11), которые в каждой точке пространства изменяются во времени по гармоническому закону. Такую волну можно представить, например, в виде:

$$g = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v}\mathbf{nr} \right). \quad (1.14)$$

Частота колебаний $\nu = \omega/2\pi$, ω — круговая частота.

Удобно ввести волновой вектор:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v}\mathbf{n}. \quad (1.15)$$

Тогда:

$$g = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (1.16)$$

Значение волн вида (1.16) обусловлено тем фактом, что, вообще говоря, \mathbf{k} не является константой, а функцией частоты $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$ — это называется дисперсией, из-за чего выражения (1.1)–(1.2) описывают плоские волны лишь в отсутствие дисперсии.

Общее решение волнового уравнения в виде гармонической волны может быть представлено в комплексном виде:

$$g = \psi(x, y, l)e^{-i\omega t}. \quad (1.17)$$

Подставляя (1.17) в волновое уравнение (1.11), получим уравнение:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (1.18)$$

где $k^2 = \omega^2/v^2$.

Уравнение (1.18) называется уравнением Гельмгольца, или приведенным волновым уравнением. В нем отсутствуют временные зависимости (описывает пространственное изменение поля, однако, всегда следует помнить о временной составляющей).

Как известно, электромагнитная волна переносит энергию. Вернемся к системе уравнений Максвелла (1.1)–(1.2) и получим закон сохранения энергии электромагнитного поля. Для этого умножим первое уравнение на \mathbf{E} , а второе — на \mathbf{H} и вычтем одно из другого. Получим:

$$\frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mu}{c} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \right) = 0. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) — уравнение непрерывности, или сохранения энергии. Плотность энергии электромагнитного поля равна:

$$W_0 = W_e + W_h = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}, \quad (1.20)$$

и поток энергии этого поля (называемый вектором Умова–Пойнтинга) определяется выражением:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (1.21)$$

Если рассматривается гармонический во времени волновой процесс, то физический смысл имеют средние за период значения \mathbf{S} и W . Но, поскольку \mathbf{S} и W — квадратичные функции от векторов поля, то при использовании комплексной формы нужно подставлять для \mathbf{E} и \mathbf{H} их действительные выражения: $\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ и $\frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)$. Тогда для среднего по времени вектора \mathbf{S} имеем:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{16\pi} [\overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*} + \overline{\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*}]. \quad (1.22)$$

Учитывая, что зависимость полей от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, получим:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{16\pi} [\overline{\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}] = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}]. \quad (1.23)$$

Из уравнений (1.1)–(1.2) для решений (1.12) легко получить, что

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}], \quad |\mathbf{E}| \sqrt{\varepsilon} = |\mathbf{H}| \sqrt{\mu},$$

тогда

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \mathbf{n} = v W_e \mathbf{n}.$$

1.2. Параболическое уравнение и преобразование Френеля

При исследовании волновых электромагнитных процессов обычно от уравнений Максвелла (1.1) и Гельмгольца (1.18) переходят к более простому уравнению, если на поле наложены некоторые дополнительные условия. Мы будем рассматривать узкие световые (лазерные) пучки. В таких пучках поле сконцентрировано около одной продольной координаты (оси пучка) и быстро спадает до нуля в поперечных координатах. Учесть это можно следующим образом. Предположим, что световая волна распространяется в направлении оси l и ее амплитуда быстро уменьшается в поперечном направлении. Тогда любую из компонент поля можно представить в виде произведения $F(x, y, l)e^{ikl}$, где F — медленно меняющаяся с ростом l комплексная функция. Подставляя это произведение в уравнение Гельмгольца (1.18) и пренебрегая членом $\frac{\partial^2 F}{\partial l^2}$ по сравнению с $k\frac{\partial F}{\partial l}$ и другими членами, получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial F}{\partial l} = 0. \quad (1.24)$$

Уравнение (1.24) называется параболическим, или уравнением Леонтовича–Фока, которые впервые его получили в теории распространения радиоволн. Это уравнение оказалось весьма эффективным в таких различных областях, как лазерная оптика и оптика рентгеновских лучей, в атомной оптике, так как дает полезный и практически важный инструмент для решения различных задач.

До сих пор мы рассматривали скалярное параболическое уравнение, считая, что это уравнение для одной из компонент поляризованного излучения. Обычно в литературе этот вопрос освещается, на наш взгляд, недостаточно четко. Например, отмечается, что, так как различные компоненты напряженности электрического вектора независимы, то для каждой из них распространение описывается параболическим уравнением. Это верно, однако, надо помнить, что поле в целом должно подчиняться уравнениям Максвелла, и в этом смысле компоненты не являются независимыми. Для некоторого изучения этого вопроса рассмотрим внимательнее распространение плоскополяризованного светового поля вдоль оси l .

Пусть декартовы компоненты электрического поля лежат в плоскости (x, l) :

$$E_x = f(x, y, l)e^{-i\omega t + ikl}, \quad E_y = 0, \quad E_l = g(x, y, l)e^{-i\omega t + ikl}, \quad (1.25)$$

где f, g — функции, медленно меняющиеся с изменением l . Тогда уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}$$

для компонент поля (1.25) будут следующими:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial g}{\partial y} e^{-i\omega t + ikl}, \\ H_y &= -\frac{i}{\omega\mu} \left(ikf - f' + \frac{\partial g}{\partial x} \right) e^{-i\omega t + ikl}, \\ H_l &= -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial f}{\partial y} e^{-i\omega t + ikl}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь и далее, штрих обозначает производную по l : $f' = \partial f / \partial l$, $g' = \partial g / \partial l$.

Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, при подстановке компоненты E_x дает следующее:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + ikg + g' = 0. \quad (1.27)$$

Подставляя теперь компоненты H_y и H_l в (1.27) уравнение Максвелла для x -компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{E}$, получим следующее уравнение:

$$-\frac{i}{\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - k^2 f + 2ikf' - ik \frac{\partial g}{\partial x} + f'' - \frac{\partial g'}{\partial x} \right) = \frac{i\omega\varepsilon}{c^2} f.$$

Учитывая, что $|f''| \ll |k^2 f|$, и подставляя в это уравнение g из (1.27)

(т.е. $g = -\frac{1}{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + g' \right)$), получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 f + 2ikf' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} f. \quad (1.28)$$

Теперь, если положим $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu / c^2$, то из этого уравнения получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2ikf' = 0. \quad (1.29)$$

Таким образом, это тоже параболическое уравнение.

Подставляя уравнения H_x и E_l в y -компоненту, используя уравнение (1.27), получим $(\operatorname{rot} \mathbf{H})_y = 0$, которое идентично y -компоненте 3-го уравнения Максвелла. Вычисляя 3-ю компоненту 3-го уравнения Максвелла, подставляя уравнения H_x и H_l , получим:

$$-\frac{i}{\omega\mu} \left(-ik \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) = \frac{i\omega\varepsilon}{c^2} g,$$

из которого, с учетом (1.27) и (1.28), получим аналогичное уравнение и на компоненту $g(x, y, l)$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2ikg' = 0. \quad (1.30)$$

Последнее уравнение Максвелла, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ удовлетворяется автоматически, так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$.

Из (1.27) видно, что электрическое поле не перпендикулярно к направлению распространения и имеет продольную компоненту, связанную с x -компонентой следующим образом:

$$g = -e^{-ikl} \int \frac{\partial f}{\partial x} e^{ikl} dl. \quad (1.31)$$

Форма (1.31) неудобна в работе. Воспользуемся тем, что $k \gg 1$ и возьмем интеграл в (1.31) по частям:

$$g = -e^{-ikl} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{e^{ikl}}{ik} + e^{-ikl} \int \frac{e^{ikl}}{ik} \frac{\partial f'}{\partial x} e^{ikl} dl \approx -\frac{1}{ik} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким образом, векторное описание произвольного (не обязательно гауссова) плоскополяризованного параксиального поля имеет вид:

$$E_x = f(x, y, l), \quad E_y = 0, \quad E_l = \frac{i}{k} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Например, для гауссова пучка $f(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2}\right)$ получим

$$E_l = -\frac{2ix}{k\rho^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2}\right).$$

Параболическое уравнение играет важную роль во многих задачах естествознания. Как уже отмечалось, в оптике и радиофизике это уравнение впервые было предложено Леонтовичем и Фоком [1, 2] для анализа распространения радиоволн. Для задач оптики, например, функция $F(x, y, l)$ описывает поведение когерентного светового поля с длиной волны λ в вакууме в параксиальном приближении, т.е. в предположении, что при распространении изменение поля $F(x, y, l)$ вдоль x, y значительно слабее, чем вдоль l . В этом случае переменная l называется переменной распространения, параметр $k = 2\pi/\lambda$ — волновым числом ¹⁾, а уравнение (1.24) — квазиоптическим или параболическим ²⁾ уравнением. Функция $F(x, y, l)$ обычно предполагается целой аналитической по x, y функцией и называется в оптике комплексной амплитудой.

¹⁾ Например, для лазерного пучка, выходящего из гелий-неонового лазера, $\lambda = 0.63$ мкм и, следовательно, $k \sim 10^7$ м⁻¹.

²⁾ Это название не соответствует математической классификации уравнений в частных производных 2-го порядка, но является устоявшимся в оптике [3, 4].

В дальнейшем будет использоваться следующая, принятая в оптике терминология:

- $I(x, y, l) = F(x, y, l)\overline{F}(x, y, l) = |F(x, y, l)|^2$ — интенсивность,
- $\phi(x, y, l) = \arg F(x, y, l)$ — фаза функции F .
- $F(x, y, l) = \sqrt{I(x, y, l)} \exp(i\phi(x, y, l))$ — комплексная амплитуда.

(Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение.)

Параболическое уравнение дает описание эволюции светового поля при распространении в дифференциальной форме. При наличии начального условия, например, при $l = 0$, можно, в принципе, получить распределение поля при любом l . Однако, для нашего дальнейшего рассмотрения гауссовых пучков во многих случаях более удобно представить решение параболического уравнения в виде некоторого интегрального преобразования начального поля. Чтобы получить эту связь, обратимся снова к уравнению (1.24) и представим световое поле в виде спектра плоских волн:

$$F(x, y, l) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(ik(px + qy)) A(p, q, l) dp dq. \quad (1.32)$$

Тогда для амплитуды спектра из (1.24) легко получить следующее уравнение:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial l} - k^2(p^2 + q^2)\right) A(p, q, l) = 0.$$

Из этого уравнения интегрированием найдем зависимость спектра от расстояния

$$A(p, q, l) = A_0(p, q) \exp\left(-\frac{ikl}{2}(p^2 + q^2)\right). \quad (1.33)$$

Подставив (1.33) в (1.32), получим зависимость поля от l в интегральной форме

$$F(x, y, l) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(ik(px + qy) - \frac{ikl}{2}(p^2 + q^2)\right) A_0(p, q) dp dq \quad (1.34)$$

и, соответственно, связь поля и спектра при начальных условиях

$$F(x, y, 0) = F_0(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(ik(px + qy)) A_0(p, q) dp dq.$$

Подставляя в (1.34) начальный спектр в виде обратного Фурье-преобразования

$$A_0(p, q) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-ik(px + qy)) F_0(x, y) dx dy,$$

из (1.34) получим:

$$\begin{aligned}
 F(x, y, l) &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(ik(px + qy) - \frac{ikl}{2}(p^2 + q^2)\right) \times \\
 &\quad \times \left[\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-ik(p\xi + q\eta)) F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] dp dq = \\
 &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \times \\
 &\quad \times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(ik[p(x - \xi) + q(y - \eta)] - \frac{ikl}{2}(p^2 + q^2)\right) dp dq.
 \end{aligned}$$

Внутренний несобственный интеграл вычисляется явно, поскольку

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(ibx + iax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \exp\left(-\frac{ib^2}{4a} + \frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn} a\right) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

В результате мы получаем эволюцию светового поля в интегральной форме:

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.35)$$

Это интегральное преобразование называется преобразованием Френеля, и прямым дифференцированием легко показать, что оно действительно является решением параболического уравнения (1.24).

Обратное к преобразованию (1.35) преобразование также является френелевским:

$$F_0(\xi, \eta) = -\frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) F(x, y, l) dx dy. \quad (1.36)$$

Если использовать интегральный оператор Френеля, то равенства (1.35) и (1.36) можно представить в символическом виде:

$$F(x, y, l) = \mathbf{FR}_l[F_0(\xi, \eta)], \quad F_0(\xi, \eta) = \mathbf{FR}_{-l}[F(x, y, l)].$$

Обе формулы являются частными случаями более общего равенства, связывающего комплекснозначные распределения светового поля F в плоскостях l_1 и l_2 :

$$F(x, y, l_2) = \mathbf{FR}_{l_2-l_1}[F(\xi, \eta, l_1)]. \quad (1.37)$$

Для функций $F_0(\xi, \eta) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ равенство Парсеваля

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |F(x, y, l)|^2 dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} |F_0(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \quad (1.38)$$

выражает закон сохранения энергии световых полей: полная энергия светового поля постоянна и не зависит от выбора плоскости l .

Характерно, что решение в виде интеграла Френеля удовлетворяет параболическому уравнению (1.24). Таким образом, между дифференциальными уравнениями — параболическим и Гельмгольца — и решениями в виде интегралов установлена требуемая связь.

Глава 2

СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной главе рассматриваются двумерные интегральные преобразования типа Фурье (астигматические преобразования) известных структурно устойчивых решений параболического уравнения — пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Получены интегральные и алгебраические связи между данными семействами пучков. Установлены некоторые результаты относительно вида комплекснозначных полей, инвариантных к астигматическим преобразованиям.

2.1. Специальные функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса

В данной главе проводится поиск и исследование автомодельных решений параболического уравнения, а именно рассматривается следующий вопрос: существуют ли (и, если да, то какие именно) решения $F(x, y, l)$ параболического уравнения (1.24), интенсивность которых при изменении l сохраняет свою структуру с точностью до масштаба?

Условие структурной устойчивости при этом может быть определено следующим образом:

$$I(x, y, l) = D(l)I_0\left(\frac{x}{d(l)}, \frac{y}{d(l)}\right), \quad (2.1)$$

где $d(l) > 0$ — масштабное изменение интенсивности. Определим вещественные переменные X, Y равенством

$$X + iY = \frac{x + iy}{d(l)}. \quad (2.2)$$

Использование переменных (X, Y, l) вместо (x, y, l) позволяет записать условие структурной устойчивости интенсивности в наиболее компактном виде: функция $I_0(X, Y)$ не зависит от l . Применение закона сохранения энергии (1.38) позволяет выразить $D(l)$ через $d(l)$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y, l) dx dy = D(l)d^2(l) \iint_{\mathbb{R}^2} I_0(X, Y) dX dY = \text{const}.$$

Следовательно, $D(l) = 1/d^2(l)$.

Таким образом, задача поиска автомодельных решений $F(x, y, l)$, интенсивность которых при распространении может только изменяться в масштабе, требует также нахождения функции $d(l)$, которая характеризует поведение $I(x, y, l)$ при изменении l .

Отправной точкой при решении поставленной задачи будет вещественная форма записи уравнения (1.24). В терминах интенсивности $I(x, y, l)$ и фазы $\phi(x, y, l)$ это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(I \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + k \frac{\partial I}{\partial l} = 0, \\ 2I \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 - \\ - 4I^2 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + 2k \frac{\partial \phi}{\partial l} \right] = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Подставляя выражение для интенсивности (2.1) в первое уравнение этой системы, перепишем его в переменных X, Y, l :

$$\nabla \left(I_0 \nabla \left[\phi - \frac{1}{2} k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) \right] \right) = 0,$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y} \right)$.

Если определить функцию $\phi_0(X, Y, l)$ равенством

$$\phi(x, y, l) = \frac{1}{2} k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + \phi_0(X, Y, l),$$

то структурно устойчивое световое поле $F(x, y, l)$ примет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} \sqrt{I_0(X, Y)} \times \\ \times \exp \left(\frac{1}{2} i k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + i \phi_0(X, Y, l) \right), \quad (2.4)$$

а система (2.3) в переменных X, Y, l и функциях I_0, ϕ_0 будет следующей:

$$\begin{cases} \nabla (I_0 \nabla \phi_0) = 0, \\ |\nabla \phi_0|^2 + k^2 d^3(l) d''(l) (X^2 + Y^2) + \\ + 2k d^2(l) \frac{\partial \phi_0}{\partial l} - \frac{1}{2I_0} \left(\nabla^2 I_0 - \frac{|\nabla I_0|^2}{2I_0} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

То обстоятельство, что фаза ϕ_0 , в отличие от интенсивности I_0 , зависит от всех трех переменных X, Y, l , не позволяет упростить нелинейную систему (2.5) и превращает поиск ее решений в чрезвычайно трудную

задачу. Однако, если использовать дополнительное предположение об асимптотическом поведении интенсивности при больших $x^2 + y^2$, то применение комплексного анализа (а именно тех результатов, которые связывают свойства функций со свойствами их Фурье-преобразований) позволяет довести решение задачи до конкретных аналитических выражений.

2.2. Целые аналитические функции, порядок роста и структурный вид световых полей

Следующие две теоремы уточняют свойства автомодельных решений $F(x, y, l)$ и позволяют конкретизировать представление (2.4).

Теорема 1 [5]. Пусть $F(x, y, l)$ — автомодельное решение параболического уравнения в смысле (2.1) и при некоторых $C > 0$, $A > 0$, $\alpha \geq 2$ интенсивность на начальной плоскости $l = 0$ удовлетворяет неравенству

$$I(x, y, 0) \leq C \exp(-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha)) \quad \text{для всех } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.6)$$

Тогда аналитическое продолжение функции $F(x, y, l)$ относительно переменных x, y есть целая функция второго порядка роста¹⁾ и $\alpha = 2$. В частности, не существует автомодельных решений, интенсивность которых убывает быстрее гауссовой функции $\exp(-A(x^2 + y^2))$.

Для доказательства данной теоремы потребуется ряд вспомогательных результатов, которые удобно представить в виде лемм.

Лемма 1. Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая при некоторых $C > 0$, $A > 0$, $\alpha > 0$ неравенству

$$|f(x)| \leq C \exp(-A|x|^\alpha) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

¹⁾ Если $f(z)$ — целая функция одной комплексной переменной, то

$$\rho_f = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \max_{|z|=R} |f(z)|}{\ln R}.$$

называется порядком роста функции $f(z)$. Это одна из основных характеристик поведения целой функции на бесконечности. Из данного определения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные константы A и C , что $|f(z)| \leq C \exp(A|z|^{\rho_f + \varepsilon})$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Аналогично определяется порядок роста целой функции двух переменных $f(z, w)$:

$$\rho_f = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \max_{|z|=|w|=R} |f(z, w)|}{\ln R}.$$

Соответственно, $|f(z, w)| \leq C \exp(A(|z|^{\rho_f + \varepsilon} + |w|^{\rho_f + \varepsilon}))$ для всех $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_0 > 0$, что

$$|f(z)| \leq C_0 \exp(\varepsilon|z|^\alpha) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C},$$

то $f(z) \equiv 0$.

Лемма 1 является строгой формулировкой довольно очевидного факта: если целая функция быстро убывает на каком-то луче, то она должна быстро возрасти на каком-то другом луче. Аналогом данной леммы, серьезно усиливающим ее для случая $\alpha = 1$, является теорема Карлсона [6]: если $f(z)$ — целая функция, на вещественной оси $f(x) = O(e^{-a|x|})$ для некоторого $a > 0$ и в верхней полуплоскости $f(z) = O(e^{k|z|})$, то $f(z) \equiv 0$. Иначе говоря, если $f(z) \not\equiv 0$ — целая функция и $f(x) = O(e^{-a|x|})$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то $\rho_f > 1$. Формулировку леммы 1 тоже можно несколько усилить. Например, вместо произвольно малого ε можно взять $A/(6\alpha)$, однако такое уточнение не требуется в дальнейшем. Основой доказательства данной леммы служат классический принцип Фрагмена-Линделефа и теорема об индикатрисе роста. Следующее определение и формулировки теорем взяты из [6, 7].

Определение. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от $z = re^{i\theta}$, которая регулярна в угле $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ и имеет порядок роста ρ . Тогда

$$h(\theta) = \varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}$$

называется индикатрисой роста функции $f(z)$.

Теорема об индикатрисе роста. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в угле $[\theta_1, \theta_2]$, причем $\theta_2 - \theta_1 < \frac{\pi}{\rho}$, $h(\theta_1) \leq h_1$ и $h(\theta_2) \leq h_2$. Тогда для всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$h(\theta) \leq H(\theta) = \frac{h_1 \sin \rho(\theta_2 - \theta) + h_2 \sin \rho(\theta - \theta_1)}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|f(re^{i\theta})| \leq C \exp((H(\theta) + \varepsilon)r^\rho).$$

Принцип Фрагмена-Линделефа. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в замкнутом угле величины $\frac{\pi}{\alpha}$. Если $|f(z)| \leq M$ на лучах, образующих этот угол, и неравенство $|f(z)| \leq C \exp(|z|^\beta)$ при $\beta < \alpha$ выполняется равномерно во всем угле, то $|f(z)| \leq M$ во всем угле.

Доказательство леммы 1. На протяжении всего доказательства будем обозначать через C все положительные константы, используемые в оценках модуля функции $f(z)$. Такое допущение выбрано только для простоты изложения и не влияет на общность рассуждений.

Идея доказательства следующая. Пусть $\beta_n = \pi n / 3\alpha$. Разобьем всю комплексную плоскость на углы $[\beta_n, \beta_{n+1}]$, где $n = 0, [6\alpha]$. Последовательно, начиная с $n = 1$, будем рассматривать углы $[\beta_{n-1}, \beta_{n+1}]$ и, пользуясь теоремой об индикатрисе роста, доказывать, что

$$|f(r \exp(i\beta_n))| \leq C \exp(-(A - n\varepsilon)r^\alpha). \quad (2.8)$$

В силу возможности выбора достаточно малого ε функция $f(z)$ ограничена в совокупности на всех лучах $\arg z = \beta_n$ и по принципу Фрагмена–Линделефа $|f(z)| \leq C$ во всей комплексной плоскости. Тогда теорема Лиувилля и оценка (2.7) приводят к выводу, что $f(z) \equiv 0$.

Докажем сначала неравенство (2.8) при $n = 1$. Используя условия

$$|f(z)| \leq C \exp(-A|z|^\alpha) \quad \text{на луче } \arg z = 0$$

и

$$|f(z)| \leq C \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon|z|^\alpha\right) \quad \text{на луче } \arg z = \beta_2,$$

найдем значение мажоранты $H(\beta_1)$ в соответствии с теоремой об индикатрисе роста. В условиях теоремы $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \beta_2$, $\theta_2 - \theta_1 = \frac{2\pi}{3\alpha} < \frac{\pi}{\alpha}$, $h_1 = -a$, $h_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$H(\beta_1) = \frac{-a \sin \alpha \frac{\pi}{3\alpha} + \frac{\varepsilon}{2} \sin \alpha \frac{\pi}{3\alpha}}{\sin \alpha \frac{2\pi}{3\alpha}} = -\left(a - \frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

и требуемое неравенство получается непосредственным применением второй оценки из теоремы об индикатрисе роста. По методу математической индукции сделаем следующий шаг $n \rightarrow n + 1$. Пусть $\theta_1 = \beta_n$, $\theta_2 = \beta_{n+2}$, $h_1 = -(a - n\varepsilon)$, $h_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$H(\beta_{n+1}) = \frac{-(a - n\varepsilon) \sin \alpha \frac{\pi}{3\alpha} + \frac{\varepsilon}{2} \sin \alpha \frac{\pi}{3\alpha}}{\sin \alpha \frac{2\pi}{3\alpha}} = -(a - (n + \frac{1}{2})\varepsilon)$$

и, таким образом, неравенство (2.8) доказано для всех $n = 0, [6\alpha]$. Лемма доказана. \square

Непосредственным следствием леммы 1 является утверждение: если $f(z) \not\equiv 0$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству (2.7), то $\rho_f \geq \alpha$. Следующая лемма переносит данное утверждение на случай двух комплексных переменных.

Лемма 2. Пусть $f(z, w)$ — целая функция, удовлетворяющая при некоторых $C > 0$, $A > 0$, $\alpha > 0$ неравенству

$$|f(x, y)| \leq C \exp(-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha)) \quad \text{для всех } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.9)$$

Если $f(z)$ не равна тождественно нулю, то $\rho_f \geq \alpha$.

Доказательство. Пусть z_0, w_0 — некоторые константы и ρ_z, ρ_w — порядки роста одномерных целых функций $f(z, w_0)$ и $f(z_0, w)$ соответственно. Если эти функции не равны нулю тождественно, то $\rho_z \geq \alpha$, $\rho_w \geq \alpha$ в силу неравенства (2.9) и следствия леммы 1.

По теореме о максимуме модуля аналитической функции

$$\max_{|z|=|w|=R} |f(z, w)| \geq \max \left(\max_{|z|=R} |f(z, w_0)|, \max_{|w|=R} |f(z_0, w)| \right),$$

если $|z_0| \leq R, |w_0| \leq R$. Поэтому $\rho_f \geq \max(\rho_z, \rho_w) \geq \alpha$, и лемма доказана. \square

Лемма 3. Пусть $f(x, y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и при некоторых $C > 0, A > 0, \alpha > 1$ удовлетворяет неравенству (2.9). Тогда

$$F(z, w) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(z\xi + w\eta)) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

есть целая функция двух комплексных переменных и ее порядок роста не превышает $\alpha/(\alpha - 1)$.

Доказательство. То, что $F(z, w)$ есть целая функция, очевидно в силу оценки (2.9), которая гарантирует равномерную сходимость интеграла и его производных в любой ограниченной области переменных z, w . Оценивая сверху модуль функции $F(z, w)$:

$$\begin{aligned} |F(z, w)| &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(|z||\xi| + |w||\eta|) |f(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq \\ &\leq 4C \int_0^\infty \exp(|z|\xi - A\xi^\alpha) d\xi \int_0^\infty \exp(|w|\eta - A\eta^\alpha) d\eta \end{aligned}$$

и используя асимптотику [8],

$$\int_0^\infty \exp\left(xt - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha-1}} x^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}} \exp\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right),$$

где $x \rightarrow \infty, \alpha > 1$, получаем неравенство $\rho_F \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$. \square

Доказательство теоремы 1. Условие структурной устойчивости интенсивности (2.1) позволяет распространить неравенство (2.6) на случай произвольного l :

$$I(x, y, l) \leq C(l) \exp(-A(l)(|x|^\alpha + |y|^\alpha)).$$

Здесь $C(l), A(l)$ — некоторые функции.

Перепишем преобразование Френеля (1.35) следующим образом:

$$F(x, y, l_2) = \frac{k}{2\pi i l} \exp\left(\frac{ik}{2l}(x^2 + y^2)\right) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{ik}{2(l_2 - l_1)}(x\xi + y\eta)\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{ik}{2(l_2 - l_1)}(\xi^2 + \eta^2)\right) F(\xi, \eta, l_1) d\xi d\eta.$$

Это позволяет рассматривать функции $F(x, y, l_1)$, $F(x, y, l_2)$ для любых l_1, l_2 как исходное поле и его преобразование Фурье с некоторым чисто фазовым множителем и наоборот. Поэтому, в силу лемм 2, 3 функция $F(z, w, l)$ есть целая функция двух комплексных переменных для любого l и $\alpha \leq \rho_F \leq \max\left(2, \frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$. Поскольку $\alpha \geq 2$, то $\frac{\alpha}{\alpha - 1} \leq 2$ и $F(z, w, l)$ есть функция второго порядка роста. Строгое неравенство $\alpha > 2$ приводит к противоречию $2 < \rho_F \leq 2$ и, таким образом, запрещает существование автомодельных решений параболического уравнения, интенсивность которых убывает быстрее гауссовой функции. \square

Среди автомодельных решений параболического уравнения не может быть и таких, которые описываются целыми функциями и удовлетворяют неравенству (2.6) при $\alpha \leq 1$. Это следует из соображений сходимости интеграла Френеля для $F(z, w, l)$ при всех комплексных (z, w) . Что касается решений, удовлетворяющих неравенству (2.6) при $\alpha \in (1, 2)$, то подобные гипотетические решения в силу леммы 3 обязаны быть целыми функциями с $\rho_F > 2$.

Нетрудно найти такой пример: функция

$$F(x, y, 0) = \exp(i(x^4 + y^4)) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) - \xi^4 - \eta^4) d\xi d\eta$$

удовлетворяет неравенству (2.6) с показателем $\alpha = \frac{4}{3}$ и является целой функцией четвертого порядка роста. Преобразование Френеля от $F(x, y, 0)$ хотя и не удовлетворяет условию структурной устойчивости (2.1), но также является целой функцией четвертого порядка роста для любого l . Поэтому рассуждения, подобные проведенным в теореме 1, не приводят к противоречию, и вопрос существования автомодельных решений, удовлетворяющих неравенству (2.6) при $\alpha \in (1, 2)$ остается открытым.

Все дальнейшее изложение будет посвящено автомодельным решениям параболического уравнения, описываемых целыми функциями второго порядка роста.

Теорема 2 [5, 8]. Если $F(x, y, l)$ — автомодельное решение параболического уравнения в смысле (2.1), удовлетворяющее неравенству (2.6), то в представлении (2.4) фаза $\phi_0(X, Y, l)$ имеет вид

$$\phi_0(X, Y, l) = \phi_0(X, Y, 0) + \gamma(l), \quad (2.10)$$

где $\gamma(l)$ — некоторая функция.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}(X, Y, l)$ правую часть равенства (2.4). Данная функция допускает аналитическое продолжение на \mathbb{C}^2 по переменным X, Y и $\mathcal{F}(Z, W, l)$ есть целая функция второго порядка роста. Тогда

$$\frac{\mathcal{F}(Z, W, l)}{\mathcal{F}(Z, W, 0)} = \frac{d(0)}{d(l)} \exp\left(\frac{1}{2}ik(d(l)d'(l) - d(0)d'(0))(Z^2 + W^2) + i(\phi_0(Z, W, l) - \phi_0(Z, W, 0))\right)$$

есть целая функция без нулей в \mathbb{C}^2 . Применим следующую теорему относительно порядка роста [9]: если частное двух целых функций $F(z, w)$ и $G(z, w)$ есть целая функция $H(z, w)$, то $\rho_H \leq \max(\rho_F, \rho_G)$. Поскольку $\mathcal{F}(Z, W, l)$ имеет второй порядок роста, то $\phi_0(Z, W, l) - \phi_0(Z, W, 0)$ есть целая функция и (см. сноску на стр. 19)

$$|\phi_0(Z, W, l) - \phi_0(Z, W, 0)| \leq C(l)(|Z|^{2+\varepsilon} + |W|^{2+\varepsilon}),$$

где $(Z, W) \in \mathbb{C}^2$, $C(l)$ — некоторая функция и ε — произвольно малое положительное число. Из принципа максимума модуля аналитической функции следует, что $\phi_0(Z, W, l) = \phi_0(Z, W, 0) + P(Z, W, l) + \gamma(l)$, или в вещественном варианте

$$\phi_0(X, Y, l) = \phi_0(X, Y, 0) + P(X, Y, l) + \gamma(l), \quad (2.11)$$

где

$$P(X, Y, l) = a_1(l) \frac{X^2 + Y^2}{2} + a_2(l) \frac{X^2 - Y^2}{2} + a_3(l)XY + b_1(l)X + b_2(l)Y$$

— многочлен второй степени по переменным X, Y , и $\gamma(l)$ — некоторая функция. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $P(X, Y, l) \equiv 0$.

Подстановка $l = 0$ в (2.11) дает

$$a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = b_1(0) = b_2(0) = 0. \quad (2.12)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (2.5) по l , получим

$$\left((a'_1 + a'_2)X + a'_3Y + b'_1\right) \frac{\partial I_0}{\partial X} + \left(a'_3X + (a'_1 - a'_2)Y + b'_2\right) \frac{\partial I_0}{\partial Y} + 2a'_1I_0 = 0.$$

Поскольку $I_0(X, Y)$ неотрицательна и ограничена сверху, то существует точка максимума (X_0, Y_0) , в которой

$$I_0(X_0, Y_0) > 0, \quad \nabla I_0(X_0, Y_0) = 0.$$

Тогда из вышеприведенного уравнения в частных производных следует, что $a'_1 = 0$ (следовательно, в силу (2.12), $a_1(l) \equiv 0$) и

$$\left(a'_2X + a'_3Y + b'_1\right) \frac{\partial I_0}{\partial X} + \left(a'_3X - a'_2Y + b'_2\right) \frac{\partial I_0}{\partial Y} = 0.$$

Общее решение данного уравнения есть произвольная функция вида

$$I_0 \left(a'_3 \frac{X^2 - Y^2}{2} - a'_2 XY + b'_2 X - b'_1 Y \right). \quad (2.13)$$

Но $I_0(X, Y)$ не зависит от l , поэтому a'_2, a'_3, b'_1, b'_2 , не зависят от l , а, следовательно, сами коэффициенты a_2, a_3, b_1, b_2 зависят от l линейным образом. Начальное условие (2.12) позволяет отразить этот факт, записав многочлен P в виде $P(X, Y, l) = P(X, Y, 1) \cdot l$. Таким образом, первое уравнение системы (2.5) раскрывает линейную зависимость многочлена $P(X, Y, l)$ от l .

Для дальнейшей конкретизации вида многочлена используем второе уравнение системы (2.5). Трижды продифференцировав данное уравнение по l , получим

$$k^2(d^3 d'')''' (X^2 + Y^2) + 2k(d^2)''' P(X, Y, 1) + 2k(\gamma' d^2)''' = 0.$$

Поскольку это тождество справедливо при всех X, Y , то

$$(d^3 d'')''' = (d^2)''' P(X, Y, 1) = (\gamma' d^2)''' = 0.$$

Если $P(X, Y, 1) \equiv 0$, то $P(X, Y, l) \equiv 0$ и равенство (2.10) доказано. В противном случае $(d^3 d'')''' = (d^2)''' = 0$. Из $(d^2)''' = 0$ следует, что $d^2(l)$ — квадратичная от l функция: $d^2(l) = al^2 + 2bl + c$, где a, b, c — константы. Так как

$$d^3 d'' = \frac{1}{2} d^2 (d^2)'' - \frac{1}{4} [(d^2)']^2,$$

то $d^3 d'' = a(al^2 + 2bl + c) - (al + b)^2 = ac - b^2$, т. е. равенство $(d^3 d'')''' = 0$ выполняется автоматически. Более того, выполняется равенство $(d^3 d'')' = 0$. Теперь дважды дифференцируя второе уравнение системы (2.3) по l и используя тот факт, что $(d^3 d'')' = 0$, получим

$$|\nabla P|^2 + k(d^2)'' P + k(\gamma' d^2)'' = 0.$$

Здесь $P = P(X, Y, 1)$, а $(d^2)''$, $(\gamma' d^2)''$ — константы. Левая часть данного уравнения представляет собой многочлен второй степени, коэффициенты которого обязаны быть равными нулю. Выпишем эти коэффициенты.

- Коэффициент при X^2 :

$$a_2^2(1) + a_3^2(1) + \frac{1}{2} k(d^2)'' a_2(1) = 0.$$

- Коэффициент при Y^2 :

$$a_2^2(1) + a_3^2(1) - \frac{1}{2} k(d^2)'' a_2(1) = 0.$$

Отсюда, $a_2^2(1) + a_3^2(1) = 0$ и, следовательно, $a_2(l) = a_3(l) = 0$.

- Коэффициент при X :

$$k(d^2)''b_1(1) = 0.$$

- Коэффициент при Y :

$$k(d^2)''b_2(1) = 0.$$

Следовательно, $b_1(l) = b_2(l) = 0$ и функция $P(X, Y, 1)$ тождественно равна нулю. Теорема доказана. \square

Таким образом, экспоненциальное убывание интенсивности на бесконечности (2.6) позволяет выявить структуру фазы $\phi_0(X, Y, l)$ и переписать представление (2.4) в виде

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} F_0(X, Y) \exp\left(\frac{1}{2}ikd(l)d'(l)(X^2 + Y^2) + i\gamma(l)\right), \quad (2.14)$$

где $F_0(X, Y) = \sqrt{I_0(X, Y)} \exp(i\phi_0(X, Y, 0))$ допускает аналитическое продолжение до целой функции второго порядка роста. Тем самым, структурная устойчивость интенсивности (2.1) порождает структурную устойчивость фазы.

Использование равенства (2.10) в уравнениях (2.5) позволяет найти зависимости d и γ от l . Легко показать, что эти две функции удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$d^3(l)d''(l) = \text{const}, \quad d^2(l)\gamma'(l) = \text{const}.$$

Если константа в первом уравнении этой системы отлична от нуля, то общее решение будет следующим:

$$d(l) = d_0 \sqrt{1 + \frac{4(l - l_0)^2}{k^2 \rho^4}}, \quad \gamma(l) = -\gamma_0 \arctg\left(\frac{2(l - l_0)}{k\rho^2}\right) + \gamma_1,$$

где $d_0, \gamma_0, \gamma_1, l_0, \rho$ — произвольные константы. Тогда представление (2.14) примет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} F_0\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right) \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i\gamma_0 \arg \sigma\right),$$

где $\sigma = 1 + \frac{2il}{k\rho^2}$ — комплексный параметр, введенный для более компактной формы записи.

Подставляя решение (2.14) в параболическое уравнение (1.24) и переходя к координатам x, y , получим следующее известное уравнение

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} - 4F_0(x^2 + y^2 - \gamma_0) = 0. \quad (2.15)$$

В квантовой механике оно известно как уравнение для стационарных состояний двумерного гармонического осциллятора.

Интересно, что поиск решений этого уравнения в декартовой и полярной системах координат дает разные наборы решений. Но наборы эти эквивалентны в том смысле, что любое решение одного вида представимо в виде суммы решений другого вида. Рассмотрим сначала декартову систему координат. Представим искомое решение в виде

$$F_0(x, y) = X(x)Y(y),$$

подставим его в уравнение (2.15) и, разделяя переменные, получим

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y + X \frac{d^2 Y}{dy^2} - 4XY(x^2 + y^2 - \gamma_0) = 0.$$

Поделим уравнение на $X(x)Y(y)$ и сгруппируем члены, зависящие только от x и только от y :

$$\left(\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - 4x^2 \right) + \left(\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - 4y^2 \right) = -4\gamma_0.$$

Это уравнение может быть справедливым при всех x, y , только если каждая скобка в левой части уравнения является константой. Таким образом, $X(x)$ и $Y(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - 4x^2 = c &\quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - X(4x^2 + c_1) = 0, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - 4y^2 = -4\gamma_0 - c &\quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} - Y(4y^2 + c_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

которые по сути совпадают, отличаясь только значением константы: $c_1 + c_2 = -4\gamma_0$.

Получившееся уравнение $X'' - X(4x^2 + c_1) = 0$ хорошо известно в квантовой механике и называется уравнением для одномерного гармонического осциллятора [10]. Если добавить к данному уравнению граничные условия

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} X(x) = 0,$$

то решение получается только для дискретного набора значений константы c_1 [10]. А именно, $c_1 = -4n - 2$, где n — целое неотрицательное число. Тогда $X(x) = e^{-x^2} H_n(\sqrt{2} x)$, где $H_n(x)$ — многочлены Эрмита. Аналогичным образом, $c_2 = -4m - 2$, где m — целое неотрицательное число, и $Y(y) = e^{-y^2} H_m(\sqrt{2} y)$. Следовательно, $\gamma_0 = n + m + 1$ и решениями уравнения (2.15) являются *моды Эрмита-Гаусса*

$$\mathcal{H}_{n,m}(x, y) = e^{-x^2 - y^2} H_n(\sqrt{2} x) H_m(\sqrt{2} y) \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.17)$$

Многочлены Эрмита можно определить разными способами [11]. Например, явным дифференциальным представлением (формула Родрига)

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2},$$

или с помощью производящей функции

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k(x) \frac{s^k}{k!} = e^{2xs - s^2},$$

или с помощью рекуррентного соотношения

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t).$$

Все эти определения эквивалентны, т. е. взяв за основу одно из них, можно доказать справедливость остальных. Многие важные свойства полиномов Эрмита, а также мод Эрмита–Гаусса перечислены в монографиях и справочниках [11–14].

Таким образом, одно семейство структурно устойчивых при распространении лазерных пучков — это пучки Эрмита–Гаусса. Помимо того, что они сохраняют свою структуру при распространении, они обладают рядом замечательных свойств. Во-первых, они взаимно ортогональны в следующем смысле:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}_{n,m}(x, y) \mathcal{H}_{N,M}(x, y) dx dy = \pi 2^{n+m-1} n! m! \delta_{n,N} \delta_{m,M}.$$

Во-вторых, система пучков Эрмита–Гаусса полна в пространстве всех полей с конечной энергией, т. е. любое такое поле $f(x, y)$ можно представить в виде суммы полей Эрмита–Гаусса:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \mathcal{H}_{n,m}(x, y).$$

Эти пучки показаны на рис. 2.1 и действительно реализуются в лазерах.

Вернемся теперь к уравнению (2.15) и запишем его в полярных координатах (r, ϕ) :

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \phi^2} - 4F_0(r^2 - \gamma_0) = 0. \quad (2.18)$$

Ищем решение в виде $F_0(x, y) = R(r)\Phi(\phi)$:

$$\left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} - 4r^2(r^2 - \gamma_0) \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0.$$

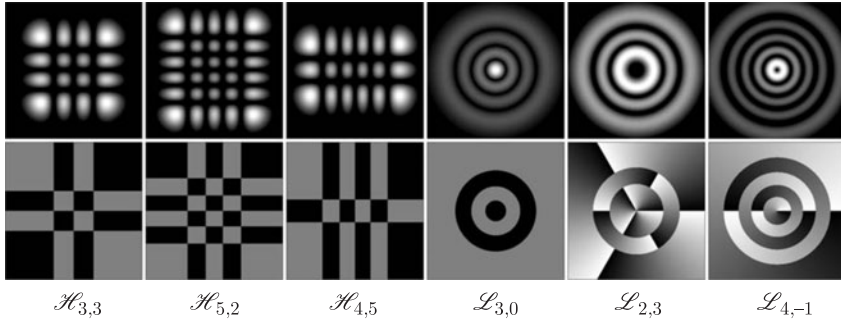


Рис. 2.1. Интенсивности (верхний ряд) и фазы (нижний ряд) функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Черный цвет соответствует нулевой интенсивности и нулевой фазе, белый цвет соответствует максимальной интенсивности и фазе 2π . Черно-серые переходы на распределениях фазы функций Эрмита–Гаусса показывают местоположение нулевых линий (при пересечении такой линии происходит скачок фазы на π). Черно-белые переходы на фазовых распределениях функций Лагерра–Гаусса соответствуют склейке фаз 0 и 2π . Точка в центре фазового распределения функции $\mathcal{L}_{2,3}(x, y)$ — изолированный нуль третьего порядка: при обходе вокруг нуля против часовой стрелки фаза трижды меняется от 0 до 2π

Разделяя переменные, получаем уравнения

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - 4Rr^2(r^2 - \gamma_0) = c, \quad \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -c\Phi. \quad (2.19)$$

Из второго уравнения находим зависимость Φ от ϕ :

$$\Phi(\phi) = C_1 e^{i\sqrt{c}\phi} + C_2 e^{-i\sqrt{c}\phi}.$$

Поскольку ϕ — это полярный угол, а нас интересуют только такие решения, которые при полном обходе точки (x, y) вокруг центра координат, переходили бы в себя, т. е. $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, то $c = m^2$, где m — целое число. Тогда в качестве линейно независимых решений можно выбрать

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}, \quad \Phi(\phi) = e^{-im\phi},$$

или

$$\Phi(\phi) = \cos m\phi, \quad \Phi(\phi) = \sin m\phi.$$

Для наших дальнейших целей предпочтительнее выбрать решения в виде экспонент.

Подставим теперь $c = m^2$ в первое из уравнений (2.19). Это уравнение также известно в квантовой механике [10]. Если добавить к нему граничные условия

$$R(r) \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} r^{|m|}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0,$$

то решение получается только для дискретного набора значений константы γ_0 . А именно, $\gamma_0 = 2n + |m| + 1$, где n — целое неотрицательное число. Тогда

$$R(r) = e^{-r^2} r^{|m|} L_n^{|m|}(2r^2),$$

где $L_n^\alpha(t)$ — многочлены Лагерра, и решениями уравнения (2.15) являются *моды Лагерра–Гаусса*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,m}(x, y) &= e^{-x^2 - y^2} (x + iy \operatorname{sgn}(m))^{|m|} L_n^{|m|}(2x^2 + 2y^2) \\ (n, \pm m &= 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Многочлены Лагерра, так же как и многочлены Эрмита, можно определить разными способами. Например,

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(t) &= \frac{1}{n!} e^t t^{-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t} t^{n+\alpha}], \\ \sum_{k=0}^{\infty} L_k^\alpha(x) s^k &= \frac{1}{(1-s)^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{xs}{1-s}\right), \\ L_0^\alpha(t) &= 1, \quad L_1^\alpha(t) = 1 + \alpha - t, \\ (n+1)L_{n+1}^\alpha(t) &= (2n + \alpha + 1 - t)L_n^\alpha(t) - (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(t). \end{aligned}$$

Таким образом, второе семейство структурно устойчивых при распространении лазерных пучков — это пучки Лагерра–Гаусса. Подобно пучкам Эрмита–Гаусса, это семейство также является ортогональным базисом пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$, т. е.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}_{n,m}(x, y) \overline{\mathcal{L}_{N,M}(x, y)} dx dy = \pi \frac{(n + |m|)!}{2^{|m|+1} n!} \delta_{n,N} \delta_{m,M},$$

и любое поле $f(x, y)$ с конечной энергией можно представить в виде суммы пучков Лагерра–Гаусса:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} \mathcal{L}_{n,m}(x, y).$$

Эти пучки показаны на рис. 2.1 и реализуются в лазерах.

Поиск решений параболического уравнения при различных предположениях относительно $F(x, y, l)$ имеет давнюю историю и отражен в обширной литературе по этому вопросу, см., например, [4, 15–32]. Следует отметить, что поскольку каждое решение $F(x, y, l)$ порождает интегральное соотношение вида (1.35), то нахождение решений при известном начальном распределении $F(x, y, 0)$ есть просто вычисление интеграла Френеля.

2.3. Пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса, их свойства при распространении и фокусировке

Аналитические выражения для пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса с использованием преобразования Френеля имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\right) \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(n+m+1)\arg\sigma\right) \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\right) \mathcal{L}_{n,\pm m}\left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n+m+1)\arg\sigma\right) \mathcal{L}_{n,\pm m}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\rho = \text{const}$ и $\sigma = 1 + \frac{2il}{k\rho^2}$.

Особое значение решений (2.21), (2.22) уравнения (1.24) связано с такими свойствами классов функций $\{\mathcal{H}_{n,m}(x, y), n, m = 0, 1, \dots\}$ и $\{\mathcal{L}_{n,m}(x, y), n, \pm m = 0, 1, \dots\}$ как ортогональность и полнота в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, что позволяет по разложению решения параболического уравнения при $l = 0$ выписать его вид для произвольного l . Для функций Эрмита–Гаусса соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned} F(x, y, 0) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} \mathcal{H}_{n,m}(x, y), \\ F(x, y, l) &= \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2}\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} e^{-i(n+m)\arg\sigma} \times \\ &\quad \times \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right). \end{aligned}$$

Кроме того, инвариантность функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса по отношению к преобразованию Френеля проявляется таким образом, что интенсивность решений (2.21) и (2.22) параболического уравнения при изменении l меняется только в масштабе, сохраняя свой «структурный» вид. Это связано с тем, что, пренебрегая множителем

$1/|\sigma|^2$, интенсивность допускает замену переменных, которая сокращает число независимых переменных до двух: $X = x/(\rho|\sigma|)$, $Y = y/(\rho|\sigma|)$. Подобное свойство — автомодельность — интенсивности не распространяется на фазу решений (2.21), (2.22). Тем не менее, далее все решения $F(x, y, l)$ параболического уравнения, обладающие автомодельной интенсивностью, будем называть структурно устойчивыми или автомодельными, не оговаривая каждый раз, что относится это только к интенсивности.

Интегральные преобразования Френеля (2.21), (2.22) являются частными случаями преобразования Фурье для функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса с дополнительной функцией в виде мнимой экспоненты с квадратичным показателем общего вида:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2)) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.23)$$

Если $a = c$ и $b = 0$, то для функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса преобразование вида (2.23) хорошо известно и получается небольшой модификацией соотношений (2.21) и (2.22):

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 + \eta^2)) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}} \exp\left(-\frac{ia(x^2 + y^2)}{4(1+a^2)} + i(n+m+1) \operatorname{arctg} a\right) \times \\ \times \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 + \eta^2)) \mathcal{L}_{n,\pm m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi(-i)^{2n+m}}{\sqrt{1+a^2}} \exp\left(-\frac{ia(x^2 + y^2)}{4(1+a^2)} + i(2n+m+1) \operatorname{arctg} a\right) \times \\ \times \mathcal{L}_{n,\pm m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Другой известный случай преобразования (2.23) для $\mathcal{H}_{n,m}(x, y)$ вытекает из представления (2.24) в виде произведения одномерных интегралов:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i(a\xi^2 + c\eta^2)) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}} \exp\left(-\frac{iax^2}{4(1+a^2)} - \frac{icy^2}{4(1+c^2)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ i\left(n + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} a + i\left(m + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} c \Big) \times \\ \times \mathcal{H}_{n,m} \left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+c^2}} \right). \quad (2.26)$$

В частности, при $c = -a$ справедлива формула:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 - \eta^2)) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}} \exp\left(-\frac{ia(x^2 - y^2)}{4(1+a^2)} + i(n-m) \operatorname{arctg} a\right) \times \\ \times \mathcal{H}_{n,m} \left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}} \right). \quad (2.27)$$

В оптике чисто мнимые экспоненты с квадратичными показателями имеют специальные названия, например, $\exp(ia(\xi^2 + \eta^2))$ называется дефокусировочным воздействием, а $\exp(ia[(\xi^2 - \eta^2) \cos 2\alpha + 2\xi\eta \sin 2\alpha])$ — астигматическим воздействием. Таким образом, преобразование Фурье с дефокусировкой функций Эрмита–Гаусса описывается равенством (2.24), а формула (2.27) является частным случаем астигматического преобразования. Задачей следующей главы является нахождение общего астигматического преобразования

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia[(\xi^2 - \eta^2) \cos 2\alpha + 2\xi\eta \sin 2\alpha]) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.28)$$

для функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Найденные формулы будут использованы в дальнейшем для исследования вопросов, связанных с автомодельностью функций вида (2.28) в некотором подмножестве параметров (a, α) .

Глава 3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной главе рассматриваются интегральные преобразования типа Фурье гауссовых пучков с дополнительными множителями экспоненциального вида. Найдено взаимно-однозначное соответствие между функциями Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса.

3.1. Астигматическое преобразование, связывающее функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса

Введем обозначения [8, 21, 33]:

$$\psi(\xi, \eta, \alpha) = (\xi^2 - \eta^2) \cos 2\alpha + 2\xi\eta \sin 2\alpha,$$

$$F_{n,m}(x, y, a, \alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia\psi(\xi, \eta, \alpha)) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3.1)$$

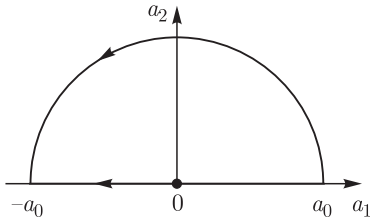


Рис. 3.1. Две траектории в пространстве параметров (a_1, a_2) , соответствующие рассматриваемым астигматическим преобразованиям

а преобразованию (3.1) при $a = a_0 > 0$ — окружность $a_1^2 + a_2^2 = a_0^2$. В соответствии с (2.27) функции $F_{n,m}(x, y, a, 0)$ и $F_{n,m}(x, y, a, \pi)$ выражаются через

Таким образом, $F_{n,m}(x, y, a, \alpha)$ описывает общее астигматическое преобразование функции Эрмита–Гаусса.

Если рассмотреть плоскость параметров (a_1, a_2) , ассоциированную с функцией $\exp(ia_1(\xi^2 - \eta^2) + 2ia_2\xi\eta)$, то, полагая $a_1 = a \cos 2\alpha$, $a_2 = a \sin 2\alpha$, можно каждому преобразованию (3.1) поставить в соответствие точку на данной плоскости (см. рис. 3.1). При этом преобразованию (2.27) при $a \in \mathbb{R}$ соответствует прямая $a_2 = 0$,

$$\mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right),$$

а их интенсивности при изменениях $a \in \mathbb{R}$ меняются только в масштабе. Однако, при $\alpha \in (0, \pi)$ функции $F_{n,m}(x, y, a, \alpha)$ не обладают подобной инвариантностью, точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [21]. Для всех $n, m = 0, 1, \dots$ справедливо равенство

$$F_{n,m}(x, y, a, \alpha) = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}} \exp\left(-\frac{ia\psi(x, y, \alpha)}{4(1+a^2)}\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k e^{i(n+m-2k) \operatorname{arctg} a} \cos^{n-k} \alpha \sin^{m-k} \alpha P_k^{(n-k, m-k)}(-\cos 2\alpha) \times \\ \times \mathcal{H}_{n+m-k, k}\left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}\right), \quad (3.2)$$

где $P_k^{(\mu, \nu)}(t) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{1}{(1-t)^\mu (1+t)^\nu} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^{k+\mu} (1+t)^{k+\nu}]$ — полиномы Якоби.

Доказательство. Воспользовавшись производящей функцией для полиномов Эрмита

$$e^{-s^2+2s\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\xi) \frac{s^k}{k!},$$

найдем производящую функцию для $F_{n,m}(x, y, a, \alpha)$:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} F_{n,m}(x, y, a, \alpha) \frac{s^n t^m}{n! m!} = \exp(-s^2 - t^2) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \right. \\ \left. + ia\psi(\xi, \eta, \alpha) - \xi^2 - \eta^2 + 2\sqrt{2}(s\xi + t\eta)\right) d\xi d\eta = \\ = \exp(-s^2 - t^2) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\langle A\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle + \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r} \rangle\right) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-s^2 - t^2 + \frac{1}{4} \langle A^{-1} \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle\right). \quad (3.3)$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 - ia \cos 2\alpha & -ia \sin 2\alpha \\ ia \sin 2\alpha & 1 + ia \cos 2\alpha \end{pmatrix}$ — положительно определенная матрица; $\mathbf{r} = (\xi, \eta)$, $\boldsymbol{\omega} = (2\sqrt{2} s - ix, 2\sqrt{2} t - iy)$ — векторы; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение векторов в унитарном пространстве¹⁾.

¹⁾ Нахождение зависящих от матриц интегралов, подобных приведенному выше, подробно описано в [34].

Таким образом,

$$F_{n,m}(x, y, a, \alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}} \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \exp\left(-s^2 - t^2 + \frac{1}{4} \langle A^{-1} \omega, \omega \rangle\right) \Big|_{s=t=0} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}} \exp\left(\frac{x^2+y^2}{4(1+a^2)} - \frac{i a \psi(x, y, \alpha)}{4(1+a^2)}\right) \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \exp\left(\frac{B}{1+a^2}\right) \Big|_{s=t=0},$$

где числитель дроби в показателе экспоненты, обозначенный как B , имеет вид:

$$B = -\frac{x^2+y^2}{2} + (1+2ia \cos 2\alpha - a^2)s^2 +$$

$$+ 4ia s t \sin 2\alpha + (1-2ia \cos 2\alpha - a^2)t^2 +$$

$$+ s\sqrt{2}(ay \sin 2\alpha - ix(1+ia \cos 2\alpha)) +$$

$$+ t\sqrt{2}(ax \sin 2\alpha - iy(1-ia \cos 2\alpha)) =$$

$$= \left[(1+ia)(s \cos \alpha + t \sin \alpha) - i \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\sqrt{2}}\right]^2 +$$

$$+ \left[(1-ia)(t \cos \alpha - s \sin \alpha) - i \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{2}}\right]^2 \quad (\ominus)$$

Введем «повернутые» переменные S, T, X, Y :

$$S + iT = (s + it)e^{-i\alpha}, \quad X + iY = \frac{x + iy}{\sqrt{1+a^2}} e^{-i\alpha}.$$

Тогда

$$(\ominus) (1+a^2) \left[e^{i \arctg a} S - \frac{iX}{\sqrt{2}} \right]^2 + (1+a^2) \left[e^{-i \arctg a} T - \frac{iY}{\sqrt{2}} \right]^2,$$

и смешанная производная примет вид

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \exp\left(\frac{B}{1+a^2}\right) \Big|_{s=t=0} =$$

$$= \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial S} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial T} \right)^n \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial S} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial T} \right)^m \exp\left(\frac{B}{1+a^2}\right) \Big|_{S=T=0} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^n \sum_{m_1=0}^m (-1)^{n_1} \binom{n}{n_1} \binom{m}{m_1} (\cos \alpha)^{n-n_1+m_1} (\sin \alpha)^{n_1+m-m_1} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial S} \right)^{n+m-n_1-m_1} \exp\left(\left[e^{i \arctg a} S - \frac{iX}{\sqrt{2}} \right]^2 \right) \Big|_{S=0} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)^{n_1+m_1} \exp\left(\left[e^{-i \arctg a} T - \frac{iY}{\sqrt{2}} \right]^2 \right) \Big|_{T=0} \quad (\ominus)$$

Используем модификацию формулы Родрига для полиномов Эрмита [35]

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} e^{(ax+b)^2} \right|_{x=0} = (-ia)^n e^{b^2} H_n(ib).$$

$$\begin{aligned} & \ominus \exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{2}\right) \sum_{n_1=0}^n \sum_{m_1=0}^m (-1)^{n_1} \binom{n}{n_1} \binom{m}{m_1} (\cos \alpha)^{n-n_1+m_1} \times \\ & \times (\sin \alpha)^{n_1+m-m_1} (-ie^{i \arctg a})^{n+m-n_1-m_1} (-ie^{-i \arctg a})^{n_1+m_1} \times \\ & \times H_{n+m-n_1-m_1}\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right) H_{n_1+m_1}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = \\ & = (-i)^{n+m} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(1+a^2)}\right) \sum_{n_1=0}^n \sum_{m_1=0}^m (-1)^{n_1} \binom{n}{n_1} \binom{m}{m_1} \times \\ & \times e^{i(n+m-2(n_1+m_1)) \arctg a} (\cos \alpha)^{n-n_1+m_1} (\sin \alpha)^{n_1+m-m_1} \times \\ & \times \mathcal{H}_{n+m-n_1-m_1, n_1+m_1}\left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}\right) \ominus \end{aligned}$$

Меняем порядок суммирования $k = n_1 + m_1$.

$$\begin{aligned} & \ominus (-i)^{n+m} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(1+a^2)}\right) \times \\ & \times \sum_{k=0}^{n+m} e^{i(n+m-2k) \arctg a} (\cos \alpha)^{n+k} (\sin \alpha)^{m-k} \times \\ & \times \mathcal{H}_{n+m-k, k}\left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}\right) \times \\ & \times \sum_{n_1=0}^n (-1)^{n_1} \binom{n}{n_1} \binom{m}{k-n_1} (\tg \alpha)^{2n_1}. \end{aligned}$$

Используя одно из определений полиномов Якоби [36] (с. 626, № 30)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k = \left(\frac{2}{x-1}\right)^n P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

сворачиваем внутреннюю сумму

$$\sum_{n_1=0}^n (-1)^{n_1} \binom{n}{n_1} \binom{m}{k-n_1} (\tg \alpha)^{2n_1} = \frac{(-1)^k}{\cos^{2k} \alpha} P_k^{(n-k, m-k)}(-\cos 2\alpha),$$

находим выражение для смешанной производной:

$$\left. \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} \exp\left(\frac{B}{1+a^2}\right) \right|_{s=t=0} = (-i)^{n+m} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4(1+a^2)}\right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k e^{i(n+m-2k) \operatorname{arctg} a} \cos^{n-k} \alpha \sin^{m-k} \alpha P_k^{(n-k, m-k)}(-\cos 2\alpha) \times \\ & \times \mathcal{H}_{n+m-k, k} \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}} \right), \end{aligned}$$

и, подставляя его в $F_{n,m}(x, y, a, \alpha)$, получаем равенство (3.2). \square

Следующий частный случай преобразования (3.2) представляет особый интерес.

Теорема 2 [21]. *Преобразование Фурье с весовой функцией $\exp(2i\xi\eta)$ переводит класс функций Эрмита–Гаусса в класс функций Лагерра–Гаусса:*

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + 2i\xi\eta) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (-1)^{n+m} \exp\left(-\frac{ixy}{4}\right) \begin{cases} (2i)^n m! \mathcal{L}_{m,n-m}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}, \frac{y}{2\sqrt{2}}\right) & (n \geq m), \\ (2i)^m n! \mathcal{L}_{n,m-n}\left(\frac{y}{2\sqrt{2}}, \frac{x}{2\sqrt{2}}\right) & (n \leq m). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Кроме устанавливаемого посредством единой функции взаимно-однозначного соответствия между классами функций $\{\mathcal{H}_{n,m}(x, y)\}$ и $\{\mathcal{L}_{n,m}(x, y)\}$, соотношение (3.4) интересно тем, что, рассматривая только его левую часть, совершенно неочевидно, что модуль данного интеграла является радиально-симметричной функцией.

Для доказательства теоремы 2 потребуется вспомогательное утверждение, которое, в отличие от интегрального соотношения (3.4), связывает многочлены Эрмита и Лагерра с помощью конечного суммирования.

Лемма. *При всех $n, m = 0, 1, \dots$ справедливо равенство:*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{(n-k, m-k)}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = \\ & = 2^{n+m} \begin{cases} (-1)^m m! (x + iy)^{n-m} L_m^{n-m}(x^2 + y^2) & (n \geq m), \\ (-1)^n n! (x - iy)^{m-n} L_n^{m-n}(x^2 + y^2) & (n \leq m). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство. Рассмотрим два варианта одной формулы:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-\xi^2 - \eta^2 + 2i(x\xi + y\eta)) d\xi d\eta = \pi \exp(-x^2 - y^2), \\ & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-\xi^2 - \eta^2 + iz(\xi - i\eta) + i\bar{z}(\xi + i\eta)) d\xi d\eta = \pi \exp(-z\bar{z}). \end{aligned}$$

Поддействуем на нее операторами $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ и $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n$. Тогда получим

$$\begin{aligned} (2i)^{m+n} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-\xi^2 - \eta^2 + 2i(x\xi + y\eta)) \xi^m \eta^n d\xi d\eta = \\ = \pi \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \exp(-x^2 - y^2) = \\ = \pi (-1)^{m+n} \exp(-x^2 - y^2) H_m(x) H_n(y), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} i^{m+n} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-\xi^2 - \eta^2 + iz(\xi - i\eta) + i\bar{z}(\xi + i\eta)) \times \\ \times (\xi - i\eta)^m (\xi + i\eta)^n d\xi d\eta = \\ = \pi \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \exp(-z\bar{z}) = \\ = \pi \exp(-z\bar{z}) \begin{cases} (-1)^n m! z^{n-m} L_m^{n-m}(z\bar{z}) & (n \geq m), \\ (-1)^m n! \bar{z}^{m-n} L_n^{m-n}(z\bar{z}) & (n \leq m). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Далее,

$$(\xi - i\eta)^m (\xi + i\eta)^n = \xi^{m+n} \left(1 + \left(-\frac{i\eta}{\xi}\right)\right)^m \left(1 - \left(-\frac{i\eta}{\xi}\right)\right)^n \equiv$$

Используем формулу Родрига для многочленов Якоби при $t = 0$:

$$P_k^{(n-k, m-k)}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} \left[(1-t)^n (1+t)^m \right] \Big|_{t=0}.$$

$$\begin{aligned} \equiv \xi^{m+n} \sum_{k=0}^{n+m} (-2)^k P_k^{(n-k, m-k)}(0) \left(-\frac{i\eta}{\xi}\right)^k = \\ = \sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{(n-k, m-k)}(0) \xi^{n+m-k} \eta^k. \end{aligned}$$

Подставляя данное выражение в левую часть (3.7) и используя (3.6) для каждого слагаемого $\xi^{n+m-k} \eta^k$, получаем утверждение леммы. \square

Интересно отметить, что соотношение (3.5) допускает следующее символическое представление:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-x^2 - y^2} = \\ = (-1)^{m+n} e^{-x^2 - y^2} (Hx - iHy)^m (Hx + iHy)^n, \end{aligned}$$

где после перемножения биномов в правой части каждое слагаемое вида $(Ht)^k$ нужно заменить на многочлен Эрмита $H_k(t)$.

Доказательство теоремы 2. При $a = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ соотношение (3.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + 2i\xi\eta) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-i}{2} \right)^{n+m} \exp\left(-\frac{x^2 + 2ixy + y^2}{8}\right) \times \\ & \times \sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{(n-k, m-k)}(0) H_{n+m-k}\left(\frac{x+y}{2\sqrt{2}}\right) H_k\left(\frac{y-x}{2\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Использование леммы позволяет свернуть последнюю сумму и получить равенство (3.5). \square

На рис. 3.2, 3.3 показан процесс изменения нулевых линий функции $F_{2,1}(x, y, a, \alpha)$. В первом случае — при $a = 1$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Во втором — при $a \in [0, \infty)$, $\alpha = \pi/4$.

Преобразование Френеля тесно связано с математическим описанием процессов, происходящих в лазере, а чисто фазовые функции $\exp(i\phi(\xi, \eta))$ реализуются оптическими пластинами с неоднородной толщиной [37–39]. Кроме того, пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса генерируются в резонаторах лазеров как когерентные световые поля, обладающие автомодельной интенсивностью. Практическая реализация преобразования Фурье в оптическом эксперименте производится с помощью сферической линзы, $\exp\left(-\frac{ik}{2l_0}(\xi^2 + \eta^2)\right)$, устанавливаемой на выходе светового пучка из лазера. Тогда распространяющееся световое поле примет вид

$$\begin{aligned} F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] - \right. \\ \left. - \frac{ik}{2l_0}(\xi^2 + \eta^2)\right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

и, таким образом, в плоскости $l=l_0$ реализуется преобразование Фурье выходящего из лазера пучка, описываемого функцией $f(\xi, \eta)$.

Использование пары «сферическая линза + цилиндрическая линза» со специально подобранными фокусными расстояниями позволяет реализовать на практике преобразования (3.2) и (3.4). А именно, если систему, состоящую из сферической линзы $\exp\left(-\frac{i(\xi^2 + \eta^2)}{d}\right)$

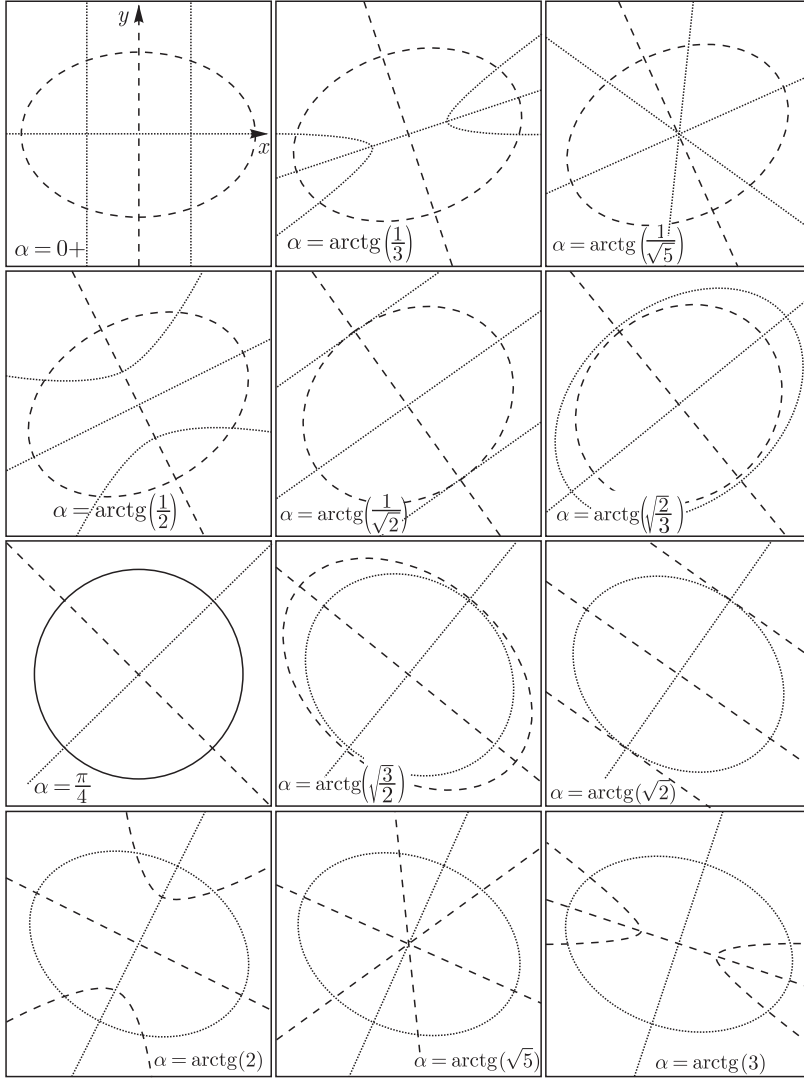


Рис. 3.2. Движение нулевых линий функций $u(x, y, \alpha)$, $v(x, y, \alpha)$ при изменении параметра α . Эти функции определяются из равенства (3.1) при $n = 2$, $m = 1$ и соотношения

$$F_{2,1}(x, y, 1, \alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp \left(-\frac{1}{8} i \psi(x, y, 1, \alpha) - \frac{3}{4} \pi i \right) (u(x, y, \alpha) + i v(x, y, \alpha)).$$

Пунктиром обозначены линии $u(x, y, \alpha) = 0$, точками — линии $v(x, y, \alpha) = 0$. Расположение осей координат одинаково для всех кадров и схематично показано на первом из них

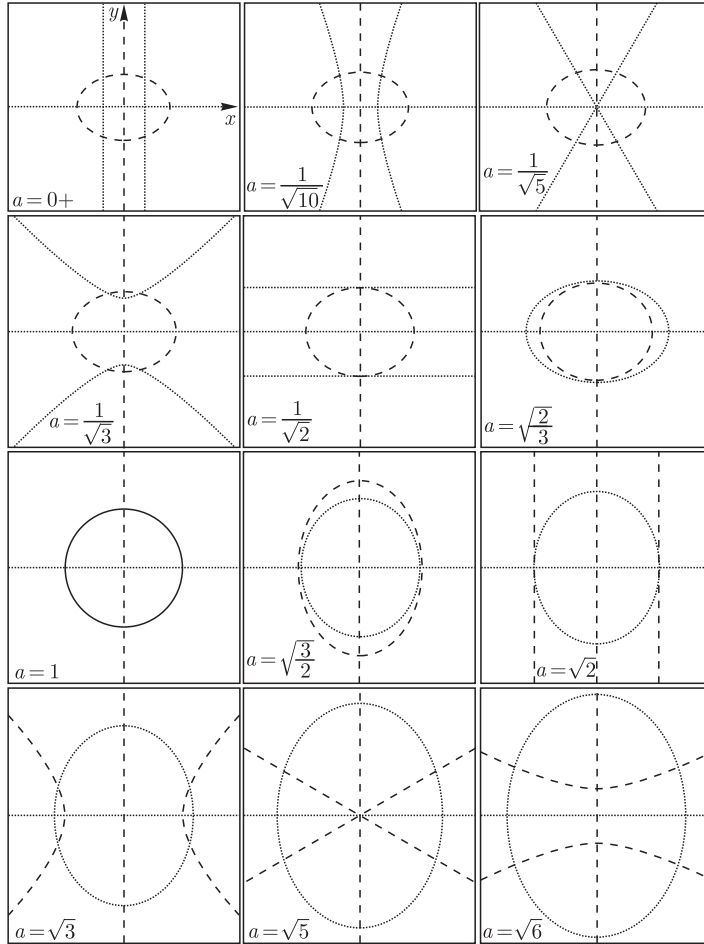


Рис. 3.3. Движение нулевых линий функций $u(x, y, a)$, $v(x, y, a)$ при изменении параметра a . Эти функции определяются из равенства (3.1) при $n = 2$, $m = 1$ и соотношения

$$F_{2,1} \left(x, y, a, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2\sqrt{2} \pi}{(1 + a^2)^{7/2}} \exp \left(-\frac{x^2 + 2iaxy + y^2}{4(1 + a^2)} \right) (u(x, y, a) + iv(x, y, a)).$$

Пунктиром обозначены линии $u(x, y, a) = 0$, точками — линии $v(x, y, a) = 0$. Легко показать, что

$$F_{n,m} \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{1}{a}, \frac{\pi}{4} \right) = a(-i)^{n+m} \exp \left(-\frac{ixy}{2a} \right) \overline{F}_{n,m} \left(x, y, a, \frac{\pi}{4} \right).$$

Как следствие, кривые $u(x, y, a) = 0$, $v(y, x, 1/a) = 0$ при $a > 0$ отличаются только масштабом

и цилиндрической линзы $\exp\left(\frac{2i\xi^2}{d}\right)$, повернуть на угол α , то тем самым будет реализована функция

$$\begin{aligned} \exp\left(i\frac{-(\xi^2 + \eta^2) + 2(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha)^2}{d}\right) = \\ = \exp\left(i\frac{(\xi^2 - \eta^2) \cos 2\alpha + 2\xi\eta \sin 2\alpha}{d}\right), \end{aligned}$$

используемая в рассмотренных преобразованиях типа Фурье.

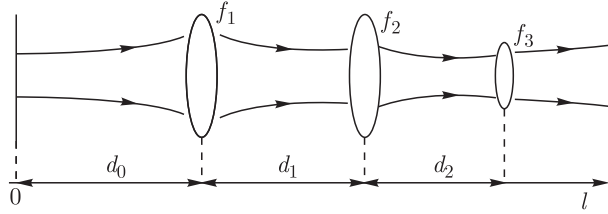


Рис. 3.4. Экспериментальная установка модового конвертора. Плоскость (ξ, η) перпендикулярна оси l ; $f_1 = 250$ мм, $f_2 = 85$ мм и $f_3 = 3,4$ мм — фокусные расстояния сферических линз 1, 2 и цилиндрической линзы 3

Оптическая схема для экспериментальной реализации астигматического преобразования (3.4) представлена на рис. 3.4. Гауссов пучок с комплексным параметром $q_0^{-1} = -i\lambda/(\pi w_0^2)$ преобразуется сферическими линзами 1, 2 в плоскости $l = d_0 + d_1 + d_2$ в пучок с параметром $q_1^{-1} = 1/R - i\lambda/(\pi w^2)$ по известной формуле из [40]:

$$q_1 = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D} + d_2,$$

где

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{d_1}{f_1}, \quad B = d_0 + d_1 - \frac{d_0 d_1}{f_1}, \\ C &= -\frac{1}{f_1} - \frac{d_1}{f_2} + \frac{d_1}{f_1 f_2}, \quad D = 1 - \frac{d_0}{f_1} - \frac{d_1}{f_2} - \frac{d_0}{f_2} + \frac{d_0 d_1}{f_1 f_2}. \end{aligned}$$

Параметры схемы выбраны таким образом, что $\text{Re } q_1^{-1} = -\text{Im } q_1^{-1} = \gamma$, или $\lambda R/\pi = w^2$. Цилиндрическая линза 3 с фокусным расстоянием $f_3 = 1/(2\gamma)$, расположенная в плоскости $l = d_0 + d_1 + d_2$ преобразует фазовый фронт пучка следующим образом:

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\pi\gamma}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{\pi\gamma}{\lambda} \cdot 2\eta^2 = \frac{\pi\gamma}{\lambda}(\xi^2 - \eta^2).$$

Поворотом цилиндрической линзы вокруг оси l на угол α реализуется требуемый астигматизм:

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\pi\gamma}{\lambda}[(\xi^2 - \eta^2) \cos 2\alpha + 2\xi\eta \sin 2\alpha].$$

Распределение амплитуды гауссова пучка в плоскости цилиндрической линзы будет следующим:

$$G(\xi, \eta) = \exp\left(-\frac{\pi\gamma}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\right).$$

За цилиндрической линзой в дальней зоне реализуется требуемое астигматическое преобразование. В реальном эксперименте параметры оптической схемы были следующими: $d_0 = 900$ мм, $d_1 = 450$ мм, $d_2 = 151,3$ мм, $f_1 = 250$ мм, $f_2 = 85$ мм, $f_3 = 3,4$ мм ($\gamma = 0,15$ мм⁻¹).

На рис. 3.5 представлены экспериментально зарегистрированные распределения интенсивности световых полей, иллюстрирующие интегральное преобразование (3.4): в каждой паре сверху — интенсивность

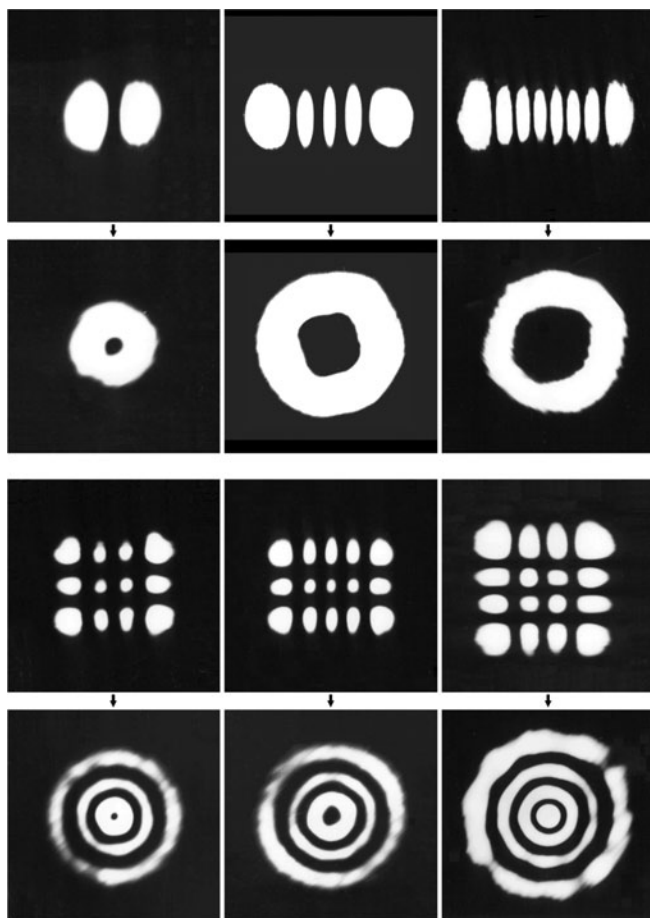


Рис. 3.5. Экспериментально зарегистрированные распределения интенсивности функций Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса

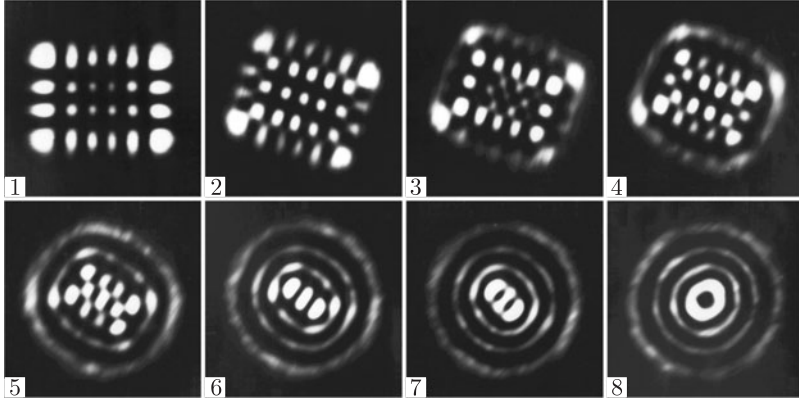


Рис. 3.6. Эволюция поля $F_{5,3}(x, y, 1, \alpha)$, определяемого формулой (3.2), при изменении α

функции Эрмита–Гаусса (исходное световое поле), снизу — интенсивность соответствующей функции Лагерра–Гаусса (световое поле, полученное из исходного по вышеописанной схеме). Для каждой функции $\mathcal{H}_{n,m}$ можно легко подсчитать значения индексов n, m и, тем самым, определить $|n - m|$ — порядок изолированного нуля в центре, $\min(n, m)$ — число нулевых колец преобразованного светового поля.

На рис. 3.6 показана эволюция поля $F_{5,3}(x, y, 1, \alpha)$ при $a = 1$ и изменении параметра α от 0 до $\frac{\pi}{4}$ в интегральном преобразовании (3.2).

Исследование преобразования (3.2) при различных a, α позволяет получить некоторые следствия, которые, подобно (3.5), связывают многочлены Эрмита, Лагерра и Якоби с помощью конечных сумм.

Следствие 1.

$$\sum_{k=0}^{n+m} \cos^{n-k} \alpha \sin^{m-k} \alpha P_k^{(n-k, m-k)}(-\cos 2\alpha) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = H_n(x \cos \alpha + y \sin \alpha) H_m(x \sin \alpha - y \cos \alpha). \quad (3.8)$$

Доказательство. Полагая $a = 0$ в интегральных соотношениях (2.27) и (3.2), получим

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi+y\eta)} \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \pi(-i)^{n+m} \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi+y\eta)} \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \pi(-i)^{n+m} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=0}^{n+m} \cos^{n-k} \alpha \sin^{m-k} \alpha P_k^{(n-k, m-k)}(-\cos 2\alpha) \times \\ & \times \mathcal{H}_{n+m-k, k} \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2}, \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Приравнивая правые части и переходя от функций Эрмита-Гаусса к многочленам Эрмита, получаем равенство (3.8). \square

В частном случае $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ оно принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+m} (\pm 2)^k P_k^{(n-k, m-k)}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = \\ = 2^{\frac{n+m}{2}} H_n \left(\frac{x \pm y}{\sqrt{2}} \right) H_m \left(\frac{x \mp y}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Интересно отметить, что равенства (3.8) и (3.10) можно трактовать как дискретные аналоги интегральных соотношений (2.27) и (3.4) при $a = \pm 1$. А именно, если рассмотреть две параметризованные экспоненты:

- $\exp(i\psi(\xi, \eta, \alpha))$ для интегрального преобразования

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, \alpha)) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

- $\exp(2i\alpha)$ для конечной суммы

$$\sum_{k=0}^{n+m} 2^k (e^{2i\alpha})^k P_k^{(n-k, m-k)}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y),$$

то при $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ получаются, соответственно, трансформации

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}, & \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{L}, & \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} & \text{для интеграла;} \\ H &\rightarrow H, & H &\rightarrow L, & H &\rightarrow H & \text{для суммы.} \end{aligned}$$

В действительности подобное соответствие имеет место и при всех промежуточных значениях параметра α , однако доказательство этого факта предпочтительнее отложить до следующей главы, где исследование интегральных и алгебраических преобразований функций Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса будет проведено на более высоком уровне общности.

Следствие 2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+m}{2} \right]'} (-2)^k k! P_k^{(n-k, m-k)}(0) ((x + iy)^{n+m-2k} + (-1)^m (x - iy)^{n+m-2k}) \times \\ \times L_k^{n+m-2k}(x^2 + y^2) = i^m H_n(x) H_m(y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Штрих около знака суммы означает, что последнее слагаемое в данной сумме нужно разделить пополам, если n и m четны.

Доказательство. Применим обратное преобразование Фурье к соотношению (3.4). Тогда

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(i(x\xi + y\eta) - \frac{i\xi\eta}{4}\right) \times \\ \times \left\{ \begin{aligned} (2i)^n m! \mathcal{L}_{m,n-m}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}, \frac{\eta}{2\sqrt{2}}\right), & \quad (n \geq m) \\ (2i)^m n! \mathcal{L}_{n,m-n}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{2}}, \frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right), & \quad (n \leq m) \end{aligned} \right\} d\xi d\eta = \\ = 4\sqrt{2} \pi (-1)^{n+m} \exp(2ixy) \mathcal{H}_{n,m}(x, y). \quad (3.12) \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках представимо в виде суммы функций Эрмита–Гаусса благодаря (3.5):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} (2i)^n m! \mathcal{L}_{m,n-m}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}, \frac{\eta}{2\sqrt{2}}\right), & \quad (n \geq m) \\ (2i)^m n! \mathcal{L}_{n,m-n}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{2}}, \frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right), & \quad (n \leq m) \end{aligned} \right\} = \\ = \frac{i^{2m+n}}{2^{(n+m)/2}} \sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{(n-k, m-k)}(0) \mathcal{H}_{n+m-k,k}(\xi, \eta). \quad (3.13) \end{aligned}$$

После подстановки данного представления в (3.12) и почленного интегрирования с использованием (3.4) получаем (3.11). \square

Подобно интегральному преобразованию (3.2) для функций Эрмита–Гаусса доказывается аналогичный результат для функций Лагерра–Гаусса: для всех $n, m = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia\psi(\xi, \eta, \alpha)) \mathcal{L}_{n,\pm m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi(-i)^m}{n! \sqrt{1+a^2}} 2^{-2n-\frac{3}{2}m} \times \\ \times \exp\left(-\frac{ia\psi(x, y, \alpha)}{4(1+a^2)} + i(2n+m) \arctg a \pm im\alpha\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{2n+m} \left(\mp 2i \frac{1-ia}{1+ia}\right)^k P_k^{(n-k, n+m-k)}(0) \times \\ \times \mathcal{H}_{2n+m-k,k}\left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2\sqrt{1+a^2}}\right). \quad (3.14) \end{aligned}$$

В частности, при $a = 1$

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, \alpha)) \mathcal{L}_{n,\pm m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\pi i^n}{n! \sqrt{2}} 2^{-n-m} \exp\left(-\frac{i\psi(x, y, \alpha)}{8} - im\beta\right) \times \\ & \times \mathcal{H}_{n,n+m}\left(\frac{x \cos \beta \mp y \sin \beta}{2\sqrt{2}}, \frac{x \sin \beta \pm y \cos \beta}{2\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\beta = \frac{\pi}{4} \mp \alpha$.

Дальнейшее изучение интегральных преобразований типа Фурье функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса будет продолжено в главе 4.

3.2. Теоремы об инвариантности и преобразование Лоренца

В предыдущем параграфе было исследовано действие интегрального оператора типа Фурье

$$F(x, y, a, \alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia\psi(\xi, \eta, \alpha)) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.16)$$

при $\psi(\xi, \eta, \alpha) = (\xi^2 - \eta^2) \cos 2\alpha + 2\xi\eta \sin 2\alpha$ на функции Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta)$ и Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{n,m}(\xi, \eta)$. Одним из отправных пунктов исследования было известное свойство инвариантности функций $\mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta)$ к изменениям параметра $a \in \mathbb{R}$ в интегральном преобразовании (3.16) при $\alpha = 0$. В данном параграфе исследование функций, инвариантных к интегральному преобразованию (3.16), продолжается с целью получить ответ на следующий вопрос. Пусть $\alpha = \text{const}$ (или $a = \text{const}$). При каких $f(\xi, \eta)$ функция $F(x, y, a, \alpha)$ будет структурно устойчивой¹⁾ к изменениям параметра $a \in \mathbb{R}$ (соответственно $\alpha \in [0, \pi]$)?

Теорема 1 [8]. Пусть $\alpha_0 = \text{const}$. Если $F(x, y, a, \alpha_0)$ структурно устойчива к изменениям параметра $a \in \mathbb{R}$ в смысле

$$F(x, y, a, \alpha_0) = \exp\left(-\frac{ia\psi(x, y, \alpha_0)}{4(1+a^2)}\right) G_1(a) G_2\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right),$$

¹⁾ Согласно рассуждениям из § 2.3, структурная устойчивость функции F понимается в смысле автомодельности интенсивности, т. е. интенсивность комплексного поля $F(x, y, a, \alpha)$ допускает сокращение числа независимых переменных.

где G_1, G_2 — некоторые функции, то множество \mathcal{M} всех функций $f(\xi, \eta)$ представимо в виде

$$\mathcal{M} = \left\{ f(\xi, \eta) = \sum_{n=\max(0,k)}^{\infty} c_n \mathcal{H}_{n,n-k}(\xi \cos \alpha_0 + \eta \sin \alpha_0, \eta \cos \alpha_0 - \xi \sin \alpha_0) \right\}, \quad (3.17)$$

где c_n — произвольные комплексные константы и $k \in \mathbb{Z}$ — фиксированное целое число. Таким образом, каждая функция $f(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$ порождает комплексное поле $F(x, y, a, \alpha_0)$, интенсивность которого при изменении параметра a меняется только в масштабе.

Доказательство. Заметим, что, не изменяя общности, достаточно рассмотреть случай $\alpha_0 = 0$. Общий случай сводится к данному повороту систем координат (ξ, η) и (x, y) . Запишем функцию $f(\xi, \eta)$ из $L_2(\mathbb{R}^2)$ в виде

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta).$$

Использование формулы (2.27) приводит к равенству

$$\begin{aligned} G_1(a)G_2\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right) &= \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{n+m} c_{nm} e^{i(n-m) \arctg a} \times \\ &\times \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Делая замену $X = \frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, Y = \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{n+m} c_{nm} e^{i(n-m) \arctg a} \mathcal{H}_{n,m}(X, Y) = G_3(a)G_2(X, Y),$$

где $G_3(a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\pi} G_1(a)$. Комбинируя эту формулу с ее частным случаем при $a = \pi 0$, получим

$$\begin{aligned} G_3(0) \cdot G_3(a)G_2(X, Y) - G_3(a) \cdot G_3(0)G_2(X, Y) &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{n+m} c_{nm} \left[G_3(0)e^{i(n-m) \arctg a} - G_3(a) \right] \mathcal{H}_{n,m}(X, Y) &= 0 \end{aligned}$$

В силу полноты функций $\{\mathcal{H}_{n,m}(X, Y), n, m = 0, 1, \dots\}$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$

$$c_{nm} \left[G_3(0)e^{i(n-m) \arctg a} - G_3(a) \right] = 0 \quad \text{для всех } n, m.$$

Отсюда нетрудно получить, что только функции вида

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n=\max(0,k)}^{\infty} c_n \mathcal{H}_{n,n-k}(\xi, \eta), \quad k = \text{const} \in \mathbb{Z} \quad (3.19)$$

(т.е. при выполнении условия $n - m = \text{const}$) порождают функции, структурно устойчивые к изменениям параметра a :

$$\begin{aligned} F(x, y, a, 0) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 - \eta^2)) f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi(-1)^k}{\sqrt{1+a^2}} \exp\left(-\frac{ia(x^2 - y^2)}{4(1+a^2)} - ik \operatorname{arctg} a\right) \times \\ &\times \sum_{n=\max(0,k)}^{\infty} (-1)^n c_n \mathcal{H}_{n,n+k}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right) = \\ &= \frac{\pi(-1)^k}{\sqrt{1+a^2}} \exp\left(-\frac{ia(x^2 - y^2)}{4(1+a^2)} - ik \operatorname{arctg} a\right) \times \\ &\times f\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, -\frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Теорема доказана. \square

Следствие. Если $f(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$, то

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + i\psi\left(\xi, \eta, \alpha_0 + \frac{\pi}{4}\right)\right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \quad (3.21)$$

является радиально-симметричной функцией.

Доказательство проводится прямым интегрированием функции вида (3.17). Например, при $\alpha_0 = 0$ и $k \geq 0$ получаем

$$\psi\left(\xi, \eta, \alpha_0 + \frac{\pi}{4}\right) = 2\xi\eta \quad \text{и} \quad f(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{H}_{n,n+k}(\xi, \eta).$$

Используя (3.4), получим

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + 2i\xi\eta) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{H}_{n,n+k}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2 + 2ixy + y^2}{8}\right) \left(\frac{x - iy}{\sqrt{2}}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} (2i)^n n! c_n L_n^k\left(\frac{x^2 + y^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что данная функция обладает радиально-симметричным модулем. Рассмотрение случая $k < 0$ проводится аналогично и, таким образом, следствие доказано. \square

Теорема 2 [8]. Пусть $a_0 = \text{const}$. Если $F(x, y, a_0, \alpha)$ структурно устойчива к изменениям параметра $\alpha \in [0, \pi]$ в смысле

$$F(x, y, a_0, \alpha) = \exp\left(-\frac{ia_0\psi(x, y, \alpha)}{4(1+a_0^2)}\right) \times \\ \times G_1(\alpha)G_2(x \cos \alpha + y \sin \alpha, y \cos \alpha - x \sin \alpha), \quad (3.22)$$

где G_1, G_2 — некоторые функции, то множество \mathcal{N} всех функций $f(\xi, \eta)$ представимо в виде

$$\mathcal{N} = \left\{ f(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{L}_{n,k}(\xi, \eta) \right\}, \quad (3.23)$$

где c_n — произвольные комплексные константы и $k \in \mathbb{Z}$ — фиксированное целое число. Таким образом, каждая функция $f(\xi, \eta) \in \mathcal{N}$ порождает комплексное поле $F(x, y, a_0, \alpha)$, интенсивность которого при изменении параметра α только поворачивается относительно начала координат.

Доказательство. Из полноты системы функций Лагерра–Гаусса в $L_2(\mathbb{R}^2)$, соотношения (3.14) и теоремы Планшереля [41] следует полнота системы функций

$$\left\{ \mathcal{F}_{n,m}(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{2n+|m|} (2i\varepsilon)^k e^{2ik\gamma} P_k^{(n-k, n+|m|-k)}(0) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{H}_{2n+|m|-k,k}(\xi, \eta); \quad n, \pm m = 0, 1, \dots; \right\}$$

при каждом фиксированном γ . Здесь $\varepsilon = 1$ при $m \geq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $m < 0$.

Будем искать функцию $f(\xi, \eta)$, порождающую структурно устойчивую к поворотам на угол α функцию $F(x, y, \alpha)$, в виде

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(\xi, \eta).$$

После интегрального преобразования и использования формулы (3.14), получим

$$G_1(\alpha)G_2(X, Y) = \frac{\pi}{\sqrt{1+a_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^{|m|}}{n!} 2^{-2n-\frac{3}{2}|m|} c_{nm} \times \\ \times \exp(i(2n+|m|) \arctg a_0 + im\alpha) \mathcal{F}_{n,m}\left(\frac{X}{2\sqrt{1+a_0^2}}, \frac{Y}{2\sqrt{1+a_0^2}}\right),$$

где $X + iY = (x + iy)e^{-i\alpha}$. Комбинируя эту формулу с ее частным случаем при $\alpha = 0$ как и в доказательстве предыдущей теоремы, получим условие

$$c_{nm} \left[G_1(0)e^{im\alpha} - G_1(\alpha) \right] = 0 \quad \text{для всех } n, m,$$

откуда и следует утверждение теоремы. \square

Отметим, что данная теорема менее интересна, нежели теорема 1. Используя определение функций Лагерра–Гаусса, легко видеть, что множество \mathcal{N} допускает представление

$$\mathcal{N} = \left\{ f(\xi, \eta) = (\xi \pm i\eta)^k f_0(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.24)$$

и действительно порождает структурно-устойчивые к поворотам функции $F(x, y, a_0, \alpha)$. Таким образом, утверждение теоремы 2 говорит о том, что других функций $f(\xi, \eta)$, кроме обычных радиально-симметричных, просто нет.

Множество \mathcal{M} имеет не такое наглядное представление, как множество \mathcal{N} . Поэтому привести пример какой-либо функции из множества \mathcal{M} в обозримой форме, а не в виде разложения по функциям $\mathcal{H}_{n,n-k}$, достаточно трудно. Один из нетривиальных примеров такого рода можно найти с помощью теории групп.

Пусть $X = X(x, y, \tau)$, $Y = Y(x, y, \tau)$ — однопараметрическая группа преобразований, определяемая как решение задачи Коши

$$\frac{dX}{d\tau} = A(X, Y), \quad \frac{dY}{d\tau} = B(X, Y), \quad X(x, y, 0) = x, \quad Y(x, y, 0) = y.$$

Оператор $U = A(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ называется инфинитезимальным оператором группы. Имеет место следующая теорема [42]: если $F_0(x, y)$ — решение некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка $LF = 0$ и оператор U коммутирует с L , то $F_0(X(x, y, \tau), Y(x, y, \tau))$ также является решением данного дифференциального уравнения.

В данной формулировке оператор U есть частный случай т.н. оператора симметрий для уравнения $LF = 0$. Построение полного семейства операторов симметрий для конкретного уравнения является одной из основных задач исследования дифференциальных уравнений групповыми методами. Применение данной теоремы позволяет доказать следующий результат.

Теорема 3. Если $F(x, y, a, 0)$ структурно устойчива к изменениям параметра $a \in \mathbb{R}$, то функция $F\left(\frac{x - cy}{\sqrt{1 - c^2}}, \frac{y - cx}{\sqrt{1 - c^2}}, a, 0\right)$ для любого $c \in (-1, 1)$ также структурно устойчива. Случай произвольного α (как было отмечено при доказательстве теоремы 1) получается из данного простым поворотом системы координат (x, y) .

Поэтому все дальнейшее изложение будем вести для случая $\alpha = 0$, не оговаривая это каждый раз.

Доказательство. Заметим, что функция

$$F(x, y, a, 0) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 - \eta^2)) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.25)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$LF \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - i \frac{\partial F}{\partial a} = 0.$$

Таким образом, оператор L известен. Однопараметрическая группа $X = \frac{x - cy}{\sqrt{1 - c^2}}$, $Y = \frac{y - cx}{\sqrt{1 - c^2}}$ есть группа Лоренца, и ее инфинитезимальный оператор имеет вид $U = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Легко проверить выполнение равенства $LU = UL$, что и завершает доказательство. \square

Преобразование $(\xi, \eta) \rightarrow \left(\frac{\xi + c\eta}{\sqrt{1 - c^2}}, \frac{\eta + c\xi}{\sqrt{1 - c^2}} \right)$ унитарно и позволяет переписать равенство (3.25) в виде

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x - cy}{\sqrt{1 - c^2}}, \frac{y - cx}{\sqrt{1 - c^2}}, a, 0\right) &= \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 - \eta^2)) f\left(\frac{\xi + c\eta}{\sqrt{1 - c^2}}, \frac{\eta + c\xi}{\sqrt{1 - c^2}}\right) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Поэтому, если $f(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$, то $f\left(\frac{\xi \pm c\eta}{\sqrt{1 - c^2}}, \frac{\eta \mp c\xi}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \in \mathcal{M}$ при всех значениях параметра $c \in [0, 1)$. Отсюда, в частности, следует, что функция $\mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\xi \pm c\eta}{\sqrt{1 - c^2}}, \frac{\eta \mp c\xi}{\sqrt{1 - c^2}}\right)$ порождает структурно-устойчивое поле вида (3.2), поле с радиально-симметричной интенсивностью (3.21), а также разлагается в ряд вида (3.17). Получение конкретных формул не представляет особого труда, кроме громоздких выкладок.

1. Инвариантность $F(x, y, a, 0)$ к изменениям a :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 - \eta^2)) \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\xi - c\eta}{\sqrt{1 - c^2}}, \frac{\eta - c\xi}{\sqrt{1 - c^2}}\right) d\xi d\eta &= \\ &= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1 + a^2}} \exp\left(-\frac{ia(X^2 - Y^2)}{4(1 + a^2)} + i(n - m) \operatorname{arctg} a\right) \times \\ &\quad \times \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{X}{\sqrt{1 + a^2}}, \frac{Y}{\sqrt{1 + a^2}}\right), \end{aligned}$$

где $X = \frac{x + cy}{\sqrt{1 - c^2}}$, $Y = \frac{y + cx}{\sqrt{1 - c^2}}$.

2. Радиально-симметричный вид $\left| F\left(x, y, 1, \frac{\pi}{4}\right) \right|^2$:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + 2i\xi\eta) \mathcal{H}_{n,m} \left(\frac{\xi - c\eta}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{\eta - c\xi}{\sqrt{1-c^2}} \right) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi(-1)^{n+m}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-c^2}{1+c^2}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{ixy}{4} - \frac{ic(x^2 + y^2)}{4(1+c^2)} + i(n+m+1) \arctg c \right) \times \\ \times \begin{cases} (2i)^n m! \mathcal{L}_{m,n-m} \left(\frac{X}{2\sqrt{2}}, \frac{Y}{2\sqrt{2}} \right), & (n \geq m), \\ (2i)^m n! \mathcal{L}_{n,m-n} \left(\frac{Y}{2\sqrt{2}}, \frac{X}{2\sqrt{2}} \right), & (n < m), \end{cases} \end{aligned}$$

где $X + iY = (x + iy) \sqrt{\frac{1-c^2}{1+c^2}}$ (см. рис. 3.7).

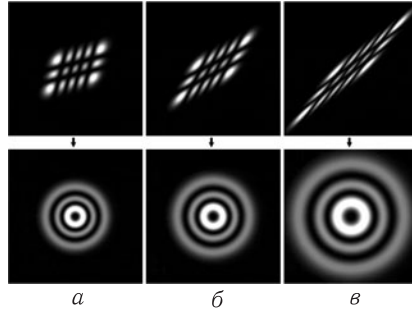


Рис. 3.7. Пучки Эрмита-Гаусса $\mathcal{H}_{3,2} \left(\frac{x - cy}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{y - cx}{\sqrt{1-c^2}} \right)$ при $c = \frac{1}{4}$ (а), $c = \frac{1}{2}$ (б), $c = \frac{3}{4}$ (в) и результаты их астигматического преобразования. Интенсивность полученных полей идентична интенсивности пучка Лагерра-Гаусса $\mathcal{L}_{2,2}$ с точностью до масштабного множителя $\sqrt{(1-c^2)/(1+c^2)}$

3. Разложение в ряд по функциям Эрмита-Гаусса (разность индексов постоянна):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,m} \left(\frac{x - cy}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{y - cx}{\sqrt{1-c^2}} \right) = \\ = (1-c^2)^{(n+m+1)/2} \sum_{k=-\min(n,m)}^{\infty} \frac{a_k(c)}{k!} \left(\frac{c}{2} \right)^k \mathcal{H}_{k+n,k+m}(x, y), \end{aligned}$$

где коэффициенты $a_k(c)$ выражаются через полиномы Якоби

$$\begin{aligned} a_k(c) &= \frac{k!(k+n+m)!}{(k+n)!(k+m)!} \sum_{j=0}^{\min(n,m)} \frac{(-1)^j \binom{n}{j} \binom{m}{j}}{\binom{k+n+m}{j} (1-c^2)^j} = \\ &= \frac{n!k!}{(n+k)!} P_n^{(k, -k-n-m-1)} \left(\frac{1+c^2}{1-c^2} \right). \end{aligned}$$

В качестве заключительной приведем формулу преобразования Френеля для функций Эрмита–Гаусса с аргументами, преобразованными по Лоренцу:

$$\begin{aligned} &\frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp \left(\frac{ik}{2l} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \right) \times \\ &\times \mathcal{H}_{n,m} \left(\frac{\xi - c\eta}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{\eta - c\xi}{\sqrt{1-c^2}} \right) d\xi d\eta = \\ &= \frac{2^{-(n+m)/2}}{\sqrt{\sigma_+ \sigma_-}} \exp \left(\frac{il(x+y)^2}{k|\sigma_+|^2} + \frac{il(x-y)^2}{k|\sigma_-|^2} \right) \times \end{aligned}$$

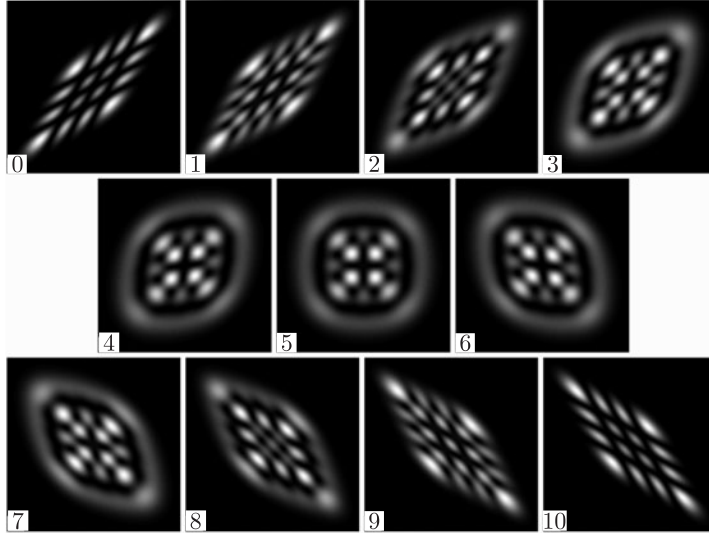


Рис. 3.8. Преобразование Френеля моды Эрмита–Гаусса с аргументами, преобразованными по Лоренцу для различных l (масштабное увеличение скомпенсировано). Номер кадра N связан с плоскостью регистрации l соотношением $\frac{2l}{k} = \operatorname{tg} \frac{\pi N}{20}$, т.е. $N = 0$ соответствует исходному полю, а $N = 10$ — его преобразованию Фурье

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=0}^{n+m} (-2)^k \exp(-i(n+m-k) \arg \sigma_+ - ik \arg \sigma_-) \times \\ & \times P_k^{(n-k, m-k)}(0) \mathcal{H}_{n+m-k, k} \left(\frac{x+y}{|\sigma_+| \sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+c}{1-c}}, \frac{y-x}{|\sigma_-| \sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} \right), \end{aligned}$$

где $\sigma_+ = \frac{1+c}{1-c} + \frac{2il}{k}$, $\sigma_- = \frac{1-c}{1+c} + \frac{2il}{k}$. На рис. 3.8 показана эволюция такой функции при $l \in [0, \infty)$ для значений $n = m = 3$, $c = 0, 5$. Легко заметить сходство между парами распределений интенсивности $(0, 10)$, $(1, 9)$, $(2, 8)$ и т.д.: второе получается из первого отражением относительно оси ординат. Это свойство симметрии является следствием общих интегральных преобразований, найденных в следующей главе.

Глава 4

ФУНКЦИИ ЭРМИТА–ЛАГЕРРА–ГАУССА И ИХ СВОЙСТВА

В данной главе предложено объединение пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса в единый класс посредством введения дополнительного параметра. Непрерывное изменение введенного параметра позволяет переходить от пучков Эрмита–Гаусса к пучкам Лагерра–Гаусса, сохраняя ряд важных свойств каждого из исходных классов пучков, например, свойство ортогональности в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Полученные таким образом пучки были названы пучками Эрмита–Лагерра–Гаусса и исследованы подобно классическим ортогональным полиномам. Найдены дифференциальные и интегральные соотношения, рекуррентные формулы и свойства симметрии, производящая функция и алгебраические разложения. Показана инвариантность функций Эрмита–Лагерра–Гаусса при некоторых интегральных преобразованиях типа Фурье.

4.1. Определение и простейшие свойства функций Эрмита–Лагерра–Гаусса

В предыдущей главе для функций Эрмита–Гаусса было найдено общее астигматическое преобразование (3.2), с помощью которого были получены некоторые алгебраические и интегральные соотношения между функциями Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса.

Введем обозначение [22, 23, 32]:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) &= \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} i^k \cos^{n-k} \alpha \sin^{m-k} \alpha P_k^{(n-k, m-k)}(-\cos 2\alpha) \mathcal{H}_{n+m-k, k}(x, y) = \\ &= e^{-x^2 - y^2} \sum_{k=0}^{n+m} i^k \cos^{n-k} \alpha \sin^{m-k} \alpha P_k^{(n-k, m-k)}(-\cos 2\alpha) \times \\ &\quad \times H_{n+m-k}(\sqrt{2} x) H_k(\sqrt{2} y). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда формулу (3.2) можно переписать следующим образом:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, \alpha)) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{i}{8}\psi(x, y, \alpha) - \frac{\pi i}{4}(n+m)\right) \times \\ \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2\sqrt{2}}, \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2\sqrt{2}} \middle| \alpha\right). \quad (4.2)$$

Сравнение интегралов (2.27), (3.4) и (4.2) показывает, что

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y | 0) = (-i)^m \mathcal{H}_{n,m}(x, y), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \pi/4) = \begin{cases} (-1)^m 2^n m! \mathcal{L}_{m,n-m}(x, y) & (n \geq m), \\ (-1)^n 2^m n! \mathcal{L}_{n,m-n}(x, -y) & (n \leq m), \end{cases} \quad (4.4)$$

т.е. функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса являются частными случаями функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/4$, соответственно. Поэтому функции, определяемые равенством (4.1), были названы функциями Эрмита–Лагерра–Гаусса. На рис. 4.1, 4.2 представлены некоторые из них. Конечно, объединение двух классов функций можно произвести многими способами, но, как будет показано далее, функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ наследуют важные свойства своих известных предшественников (например, ортогональность в $L_2(\mathbb{R}^2)$ при любом фиксированном α) и, помимо этого, в рамках класса обладают инвариантностью к общему преобразованию (2.23), что невыполнимо для отдельно

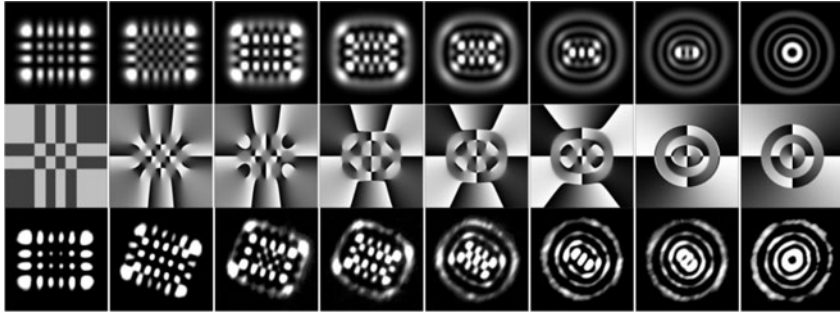


Рис. 4.1. Результаты численных и оптических экспериментов по реализации функций Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathcal{G}_{5,3}(x, y, e^{i\alpha})$ при изменении параметра α от 0 до $\pi/4$. При $\alpha = 0$ получается мода Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{5,3}(x, y)$, при $\alpha = \pi/4$ получается мода Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{3,2}(x, y)$. Верхний ряд — теоретическое распределение интенсивности, средний ряд — теоретическое распределение фазы. Для моды Лагерра–Гаусса точка в центре является изолированным нулем второго порядка: при обходе вокруг него против часовой стрелки набег фазы составляет 4π (дважды по 2π). Нижний ряд представляет распределения интенсивности, зарегистрированные экспериментально как интенсивности лазерных пучков. Поворот экспериментальных распределений интенсивности относительно теоретических обусловлен спецификой оптической реализации, поскольку в соответствии с формулой (4.2) астигматическое воздействие $\psi(x, y, \alpha)$ приводит к повороту функций Эрмита–Лагерра–Гаусса на угол α

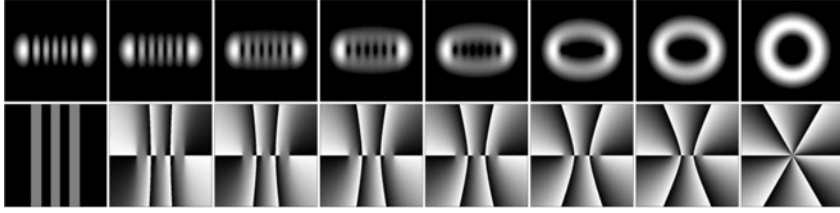


Рис. 4.2. Функции Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathcal{G}_{6,0}(x, y, e^{i\alpha})$ при изменении параметра α от 0 до $\pi/4$

взятых функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Кроме того, они физически реализуемы в резонаторах лазеров и при распространении в свободном пространстве сохраняют свою структуру.

В данном параграфе функции Эрмита–Лагерра–Гаусса исследованы в нескольких аспектах: найдены производящая функция, дифференциальное и интегральное представления, некоторые рекуррентные соотношения, дифференциальные уравнения, простейшие интегралы и ряды, содержащие функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$. В следующем параграфе рассмотрены свойства симметрии функций Эрмита–Лагерра–Гаусса по α , их связь с D -функциями Вигнера и поворотами в \mathbb{R}^3 . В третьем параграфе исследованы трансформации функций Эрмита–Лагерра–Гаусса при интегральном преобразовании (2.23).

Каждая функция Эрмита–Лагерра–Гаусса, как следует из определения (4.1), представляет из себя произведение экспоненты $e^{-x^2-y^2}$ на некоторый полином от x, y степени $n + m$. Например, функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ при значениях индексов $n, m = 0, 1, 2$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{0,0}(x, y | \alpha) &= e^{-x^2-y^2}, \\ \mathcal{G}_{1,0}(x, y | \alpha) &= e^{-x^2-y^2} 2\sqrt{2} (x \cos \alpha + iy \sin \alpha), \\ \mathcal{G}_{0,1}(x, y | \alpha) &= e^{-x^2-y^2} 2\sqrt{2} (x \sin \alpha - iy \cos \alpha), \\ \mathcal{G}_{2,0}(x, y | \alpha) &= e^{-x^2-y^2} ((4x^2 - 1)(1 + \cos 2\alpha) + \\ &\quad + 8ixy \sin 2\alpha - (4y^2 - 1)(1 - \cos 2\alpha)) = \\ &= e^{-x^2-y^2} (8(x \cos \alpha + iy \sin \alpha)^2 - 2 \cos 2\alpha), \\ \mathcal{G}_{1,1}(x, y | \alpha) &= e^{-x^2-y^2} ((4x^2 + 4y^2 - 2) \sin 2\alpha - 8ixy \cos 2\alpha), \\ \mathcal{G}_{0,2}(x, y | \alpha) &= e^{-x^2-y^2} (8(x \sin \alpha - iy \cos \alpha)^2 + 2 \cos 2\alpha).\end{aligned}$$

Поскольку функция $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ есть линейная комбинация функций Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{n+m-k,k}(x, y)$ с одинаковой суммой индексов, то в силу равенства (2.21) функция Эрмита–Лагерра–Гаусса инвариантна по отношению к преобразованию Френеля:

$$\begin{aligned}
& \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\right) \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho} \middle| \alpha\right) d\xi d\eta = \\
& = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(n+m+1) \arg \sigma\right) \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|} \middle| \alpha\right), \quad (4.5)
\end{aligned}$$

и, как следствие, для любого α порождает структурно-устойчивое решение параболического уравнения.

Еще одно свойство функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ получается из равенства (4.2): для любого фиксированного α семейство

$$\{\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha), \quad n, m = 0, 1, \dots\}$$

является базисом в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, т.к. преобразование Фурье переводит базис в базис.

Можно показать, что $\{\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha), \quad n, m = 0, 1, \dots\}$ — это ортогональный базис.

Теорема 1 [23]. Для всех $n, m = 0, 1, \dots$ справедливо равенство,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) \overline{\mathcal{G}_{N,M}(x, y | \alpha)} dx dy = \pi 2^{n+m-1} n! m! \delta_{nN} \delta_{mM}. \quad (4.6)$$

Доказательство. Предварительно удобно найти производящую функцию семейства функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$. Полагая

$$X = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2\sqrt{2}},$$

можно представить астигматическое преобразование (4.2) в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{n,m}(X, Y | \alpha) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \exp\left(i(X^2 - Y^2) + \frac{\pi i}{4}(n+m)\right) \times \\
&\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, \alpha)) \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Тогда вычисление производящей функции

$$G(X, Y, \alpha, s, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathcal{G}_{n,m}(X, Y | \alpha) \frac{s^n t^m}{n! m!}$$

становится достаточно простым, если воспользоваться выражением для производящей функции полиномов Эрмита

$$e^{-s^2 + 2sx} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x) \frac{s^k}{k!}.$$

В итоге находим формулу для $G(X, Y, \alpha, s, t)$:

$$\begin{aligned}
 G(X, Y, \alpha, s, t) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{i(X^2 - Y^2)} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, \alpha)) \times \\
 &\quad \times \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta) \frac{(se^{\pi i/4})^n (te^{\pi i/4})^m}{n! m!} d\xi d\eta = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \exp(-X^2 - Y^2 - is^2 - it^2) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + \\
 &\quad + i\psi(\xi, \eta, \alpha) - \xi^2 - \eta^2 + 2\sqrt{2}(\xi s + \eta t)e^{\pi i/4}) d\xi d\eta = \\
 &= \exp(-X^2 - Y^2 - \psi(s, t, \alpha) + \\
 &\quad + 2\sqrt{2} X(s \cos \alpha + t \sin \alpha) + 2\sqrt{2} iY(s \sin \alpha - t \cos \alpha)). \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Найдем теперь сумму следующего ряда:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{N,M=0}^{\infty} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) \overline{\mathcal{G}}_{N,M}(x, y | \alpha) dx dy \right) \frac{s^n t^m}{n! m!} \frac{S^N T^M}{N! M!} = \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{G}(x, y, \alpha, s, t) \overline{\mathbf{G}}(x, y, \alpha, S, T) dx dy = \\
 &= \exp(-\psi(s, t, \alpha) - \psi(S, T, \alpha)) \times \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \exp(-2x^2 + 2\sqrt{2} x[(s + S) \cos \alpha + (t + T) \sin \alpha]) dx \times \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \exp(-2y^2 + 2\sqrt{2} iy[(s - S) \sin \alpha - (t - T) \cos \alpha]) dy = \\
 &= \frac{\pi}{2} \exp(2sS + 2tT) = \frac{\pi}{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(2sS)^n (2tT)^m}{n! m!}.
 \end{aligned}$$

Сопоставляя в данной цепочке равенств последний ряд с первым, получим формулу (4.6). \square

Необходимо отметить, что независимость нормировочного множителя от α для всех $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$, включая функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса, есть прямое следствие равенства (4.2) и формулы Парсевала.

Подобная независимость правой части равенства (4.6) от α позволяет обобщить первоначальное определение функций Эрмита–Лагерр–

ра–Гаусса (4.1) следующим образом:

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{n+m} i^k \left(\frac{z + 1/z}{2} \right)^{n-k} \left(\frac{z - 1/z}{2i} \right)^{m-k} \times \\ \times P_k^{(n-k, m-k)} \left(-\frac{z^2 + 1/z^2}{2} \right) \mathcal{H}_{n+m-k,k}(x, y),$$

где z — произвольное комплексное число, отличное от нуля. Равенство $z = e^{i\alpha}$ связывает функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ с более общими функциями $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$.

Таким образом, первоначально чисто вещественный параметр α (поскольку, как было отмечено в предыдущей главе, в оптических экспериментах α — это угол между осями симметрии астигматической системы, состоящей из двух цилиндрических линз, и осями симметрии моды Эрмита–Гаусса) допускает «комплексификацию», что приводит к более общему семейству функций Эрмита–Лагерра–Гаусса

$$\{\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z), \quad n, m = 0, 1, \dots\},$$

которое продолжает оставаться базисом (но не ортогональным!) пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$. Это позволяет считать параметр α комплексным изначально, что помогает упростить многие полученные далее формулы за счет использования тригонометрических функций.

На рис. 4.3 показаны распределения интенсивности и фазы функции $\mathcal{G}_{4,4}(x, y, z)$ при некоторых значениях комплексного параметра z .

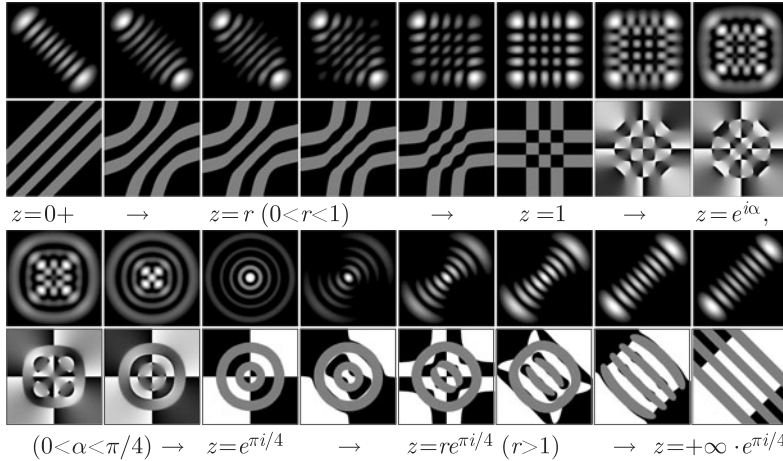


Рис. 4.3. Функции $\mathcal{G}_{4,4}(x, y, z)$ при изменении параметра z по интервалу $(0, 1]$ оси абсцисс, дуге единичной окружности $\{|z| = 1, \arg z \in (0, \pi/4)\}$ и лучу $\{\arg z = \pi/4, |z| \geq 1\}$

Производящая функция позволяет найти и формулу Родрига (т. е. дифференциальное представление) для функций Эрмита–Лагерра–Гаусса. Если переписать (4.7) в виде

$$G(x, y, \alpha, s, t) = \exp(x^2 + y^2 - \psi(s - s_0, t - t_0, \alpha)),$$

где $s_0 = \sqrt{2}(x \cos \alpha - iy \sin \alpha)$, $t_0 = \sqrt{2}(x \sin \alpha + iy \cos \alpha)$, то получает-ся дифференциальное представление:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) &= \frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{\partial^m}{\partial t^m} G(x, y, \alpha, s, t) \Big|_{s=t=0} = \\ &= e^{x^2+y^2} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{\partial^m}{\partial t^m} e^{-\psi(s,t,\alpha)} \Big|_{s=-s_0, t=-t_0} = (-1)^{n+m} e^{x^2+y^2} \times \\ &\times \frac{\partial^n}{\partial [\sqrt{2}(x \cos \alpha - iy \sin \alpha)]^n} \frac{\partial^m}{\partial [\sqrt{2}(x \sin \alpha + iy \cos \alpha)]^m} e^{-2x^2-2y^2}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Формулы Родрига для полиномов Эрмита и Лагерра являются следствиями этой формулы при подстановке $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/4$ соответственно.

Интегральное представление функций Эрмита–Лагерра–Гаусса получается с помощью подстановки в определение (4.1) интегрального представления для полиномов Эрмита:

$$H_k(x) = \frac{(-2i)^k}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2+2ixt} t^k dt$$

и вспомогательного равенства

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^{n+m} (x \cos \alpha + iy \sin \alpha)^n (x \sin \alpha - iy \cos \alpha)^m &= \\ &= (2\sqrt{2})^{n+m} \sum_{k=0}^{n+m} i^k c_k^{(n,m)}(\alpha) x^{n+m-k} y^k, \end{aligned}$$

которое по сути является одним из определений полиномов Якоби. Окончательная формула имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) &= \frac{(-2i)^{n+m}}{\pi} e^{x^2+y^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-s^2-t^2+2\sqrt{2}i(xs+yt)} \times \\ &\times (s \cos \alpha + it \sin \alpha)^n (s \sin \alpha - it \cos \alpha)^m ds dt. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Использование дифференциального представления (4.8) и тождества

$$\frac{d^k(xf)}{dx^k} = x \frac{d^k f}{dx^k} + k \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}$$

позволяет получить рекуррентные соотношения, связывающие функции Эрмита–Лагерра–Гаусса. Например, увеличение на единицу первого индекса приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{n+1,m}(x, y | \alpha) &= e^{x^2+y^2} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial}{\partial s} e^{-(s^2-t^2) \cos 2\alpha - 2st \sin 2\alpha} = \\
 &= e^{x^2+y^2} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{\partial^m}{\partial t^m} (-2s \cos 2\alpha - 2t \sin 2\alpha) e^{-(s^2-t^2) \cos 2\alpha - 2st \sin 2\alpha} = \\
 &= e^{x^2+y^2} \left(-2 \cos 2\alpha \left(s \frac{\partial^n}{\partial s^n} + n \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \right) \frac{\partial^m}{\partial t^m} e^{-(s^2-t^2) \cos 2\alpha - 2st \sin 2\alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \sin 2\alpha \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left(t \frac{\partial^m}{\partial t^m} + m \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \right) e^{-(s^2-t^2) \cos 2\alpha - 2st \sin 2\alpha} \right) = \\
 &= -2 \cos 2\alpha (s \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) + n \mathcal{G}_{n-1,m}(x, y | \alpha)) - \\
 &\quad - 2 \sin 2\alpha (t \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) + m \mathcal{G}_{n,m-1}(x, y | \alpha)).
 \end{aligned}$$

Поскольку $s = -\sqrt{2}(x \cos \alpha - iy \sin \alpha)$ и $t = -\sqrt{2}(x \sin \alpha + iy \cos \alpha)$, то

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{n+1,m} &= 2\sqrt{2}(x \cos \alpha + iy \sin \alpha) \mathcal{G}_{n,m} - \\
 &\quad - 2n \cos 2\alpha \mathcal{G}_{n-1,m} - 2m \sin 2\alpha \mathcal{G}_{n,m-1}.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается второе рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{n,m+1} &= 2\sqrt{2}(x \sin \alpha - iy \cos \alpha) \mathcal{G}_{n,m} - \\
 &\quad - 2n \sin 2\alpha \mathcal{G}_{n-1,m} + 2m \cos 2\alpha \mathcal{G}_{n,m-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь аргументы $(x, y | \alpha)$ всех функций для краткости опущены. Другая форма записи тех же формул

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{2} x \mathcal{G}_{n,m} &= \cos \alpha (\mathcal{G}_{n+1,m} + 2n \mathcal{G}_{n-1,m}) + \\
 &\quad + \sin \alpha (\mathcal{G}_{n,m+1} + 2m \mathcal{G}_{n,m-1}), \\
 2\sqrt{2} iy \mathcal{G}_{n,m} &= \sin \alpha (\mathcal{G}_{n+1,m} - 2n \mathcal{G}_{n-1,m}) + \\
 &\quad - \cos \alpha (\mathcal{G}_{n,m+1} - 2m \mathcal{G}_{n,m-1}). \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

Последние выражения позволяют вычислять интегралы вида

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^N y^M \mathcal{G}_{n_1,m_1}(x, y | \alpha) \overline{\mathcal{G}_{n_2,m_2}(x, y | \alpha)} dx dy,$$

используя в качестве отправной точки свойство ортогональности (4.6). Простейшими примерами такого рода являются равенства

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} x |\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)|^2 dx dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} y |\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)|^2 dx dy = \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} xy |\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)|^2 dx dy = 0,
 \end{aligned}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) |\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)|^2 dx dy = \frac{n+m+1}{2} \|\mathcal{G}_{n,m}\|^2,$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 - y^2) |\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)|^2 dx dy = \frac{n-m}{2} \|\mathcal{G}_{n,m}\|^2 \cos 2\alpha,$$

где $\|\mathcal{G}_{n,m}\|^2 = \pi 2^{n+m-1} n! m!$ — квадрат нормы в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Следует отметить, что вышеприведенные формулы не выполняются, если параметр α становится комплексным. Например, в последней формуле интеграл в левой части, очевидно, является вещественным, поэтому и выражение справа должно быть таковым. Нетрудно заметить, что использование формул (4.10) с комплексным α приводит к формуле

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 - y^2) |\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)|^2 dx dy = \\ = \frac{n-m}{2} \|\mathcal{G}_{n,m}\|^2 (\cos \alpha \overline{\cos \alpha} - \sin \alpha \overline{\sin \alpha}), \end{aligned}$$

или, переходя от $e^{i\alpha}$ к z ,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 - y^2) |\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)|^2 dx dy = \frac{n-m}{2} \|\mathcal{G}_{n,m}\|^2 \cdot \frac{1}{2} \left(z\bar{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \right).$$

Такое же уточнение может потребоваться и другим формулам, в которых одновременно задействованы функция Эрмита–Лагерра–Гаусса и сопряженная к ней функция.

Еще один вариант использования формулы Родрига (4.8) заключается в ее дифференцировании по x или y для получения производных функций Эрмита–Лагерра–Гаусса. (Альтернативным способом является дифференцирование интегрального представления (4.9), в этом смысле обе формулы эквивалентны.) Первые производные выражаются через функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_{n,m}}{\partial x} &= 2x \mathcal{G}_{n,m} - \sqrt{2} \cos \alpha \mathcal{G}_{n+1,m} - \sqrt{2} \sin \alpha \mathcal{G}_{n,m+1}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{n,m}}{\partial y} &= 2y \mathcal{G}_{n,m} + i\sqrt{2} \sin \alpha \mathcal{G}_{n+1,m} - i\sqrt{2} \cos \alpha \mathcal{G}_{n,m+1}. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти равенства и применяя формулы (4.10), можно находить аналогичные выражения для старших производных, которые в свою очередь можно использовать для выявления дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$. Среди уравнений второго порядка таких только два:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4(x^2 + y^2 - n - m - 1) \right] \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) = 0,$$

$$\left[\cos 2\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 4i \sin 2\alpha \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - 4((x^2 - y^2) \cos 2\alpha + m - n) \right] \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) = 0.$$

Рассматривая α в качестве переменной, а не параметра, можно получить еще одно уравнение второго порядка:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 4xy - 2i \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) = 0.$$

При этом первая производная по α функции Эрмита–Лагерра–Гаусса имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{n,m}}{\partial \alpha} = m \mathcal{G}_{n+1,m-1} - n \mathcal{G}_{n-1,m+1}.$$

Поиск примеров конечных сумм и рядов, содержащих функции Эрмита–Лагерра–Гаусса и сворачиваемых в компактные выражения, можно начать с попыток обобщения производящей функции (4.7). Довольно легко можно показать, что ряды

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \mathcal{G}_{n,m+m_0}(x, y | \alpha) \mathcal{G}_{n+n_0,m}(X, Y | \beta) \frac{s^n t^m}{n! m!}, \\ \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathcal{G}_{n+n_0,m+m_0}(x, y | \alpha) \mathcal{G}_{n,m}(X, Y | \beta) \frac{s^n t^m}{n! m!}, \quad (4.11) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}_{k+n_0,k+m_0}(x, y | \alpha) \frac{t^k}{k!}$$

приводят к выражениям вида

$$C_{n_0,m_0} e^{\Phi} \mathcal{G}_{n_0,m_0},$$

где константа C_{n_0,m_0} зависит только от целочисленных параметров n_0, m_0 ; Φ — квадратичная форма от x, y, X, Y ; переменные функции \mathcal{G}_{n_0,m_0} (т. е. первые два аргумента) линейны по x, y, X, Y .

Нахождение конкретных формул затруднительно из-за большого количества свободных параметров, а итоговые результаты выглядят весьма громоздко. Тем не менее, в ряде случаев удается получить простые выражения, например,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)|^2 \frac{t^{n+m}}{n! m!} = \frac{1}{1-4t^2} \exp\left(-2 \frac{1-2t}{1+2t} (x^2 + y^2)\right).$$

Изменения функций Эрмита–Лагерра–Гаусса при смещениях параметра α

	$\mathcal{G}_{n,m}(x, y \pi k/2 - \alpha)$	$\mathcal{G}_{n,m}(x, y \pi k/2 + \alpha)$
$k = 0$	$(-1)^m \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(x, y \alpha)$	$i^{m-n} \mathcal{G}_{n,m}(y, x \alpha) =$ $= (-1)^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(-x, -y \alpha) =$ $= \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(x, -y \alpha)$
$k = 1$	$i^{n-m} \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(y, x \alpha)$	$i^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(y, x \alpha)$
$k = 2$	$(-1)^n \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(x, y \alpha)$	$(-1)^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(x, y \alpha)$
$k = 3$	$i^{m-n} \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(y, x \alpha)$	$(-i)^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(y, x \alpha)$

Таким образом, функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ достаточно исследовать только при значениях параметра $\alpha \in [0, \pi/4]$, поскольку к ним сводятся все остальные случаи.

Выписанные формулы можно трансформировать на случай общих мод $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$. Будем использовать обозначение $\overline{\mathcal{G}}$ как сопряжение всего выражения моды, т. е. если

$$\mathcal{G}_{1,0}(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2} 2\sqrt{2} \left(x \frac{z + 1/z}{2} + y \frac{z - 1/z}{2} \right),$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1,0}(x, y, \bar{z}) &= e^{-x^2 - y^2} 2\sqrt{2} \left(x \frac{\bar{z} + 1/\bar{z}}{2} + y \frac{\bar{z} - 1/\bar{z}}{2} \right), \\ \overline{\mathcal{G}}_{1,0}(x, y, \bar{z}) &= e^{-x^2 - y^2} 2\sqrt{2} \left(x \frac{z + 1/z}{2} + y \frac{z - 1/z}{2} \right). \end{aligned}$$

Тогда преобразования функции Эрмита–Лагерра–Гаусса, представленные в таблице, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(x, y, i\bar{z}) &= i^{n-m} \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(y, x, z), \\ \mathcal{G}_{n,m}(x, y, -\bar{z}) &= (-1)^n \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(x, y, z), \\ \mathcal{G}_{n,m}(x, y, -i\bar{z}) &= i^{m-n} \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(y, x, z), \\ \mathcal{G}_{n,m}(x, y, \bar{z}) &= (-1)^m \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(x, y, z), \\ \mathcal{G}_{n,m}(x, y, iz) &= i^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(y, x, z), \\ \mathcal{G}_{n,m}(x, y, -z) &= (-1)^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(x, y, z), \\ \mathcal{G}_{n,m}(x, y, -iz) &= (-i)^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(y, x, z). \end{aligned}$$

Таким образом, выписанные соотношения показывают связи между модами Эрмита–Лагерра–Гаусса на любой окружности $|z| = R$.

Самым простым непосредственным доказательством данных соотношений может служить сравнение соответствующих производящих функций. А именно, используя равенство

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \mathcal{G}_{n,m}(x, y, z) \frac{s^n t^m}{n! m!} = \exp \left(-x^2 - y^2 - (s^2 - t^2) \frac{z^2 + 1/z^2}{2} - \right. \\ \left. - 2st \frac{z^2 - 1/z^2}{2i} + 2\sqrt{2} (xs - iyt) \frac{z + 1/z}{2} + 2\sqrt{2} (xt + iys) \frac{z - 1/z}{2i} \right),$$

легко доказать, что

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \mathcal{G}_{n,m}(x, y, iz) \frac{s^n t^m}{n! m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(y, x, z) \frac{(is)^n (-it)^m}{n! m!}.$$

Найдем теперь зависимость между модами $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$, которые относятся к внутренним и внешним по отношению к единичной окружности модам. Сделаем в вышеприведенной производящей функции одновременное сопряжение над \mathcal{G} и z (после замены $z \rightarrow 1/\bar{z}$):

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \overline{\mathcal{G}}_{n,m}(x, y, 1/\bar{z}) \frac{s^n t^m}{n! m!} = \exp \left(-x^2 - y^2 - (s^2 - t^2) \frac{z^2 + 1/z^2}{2} - \right. \\ \left. - 2st \frac{z^2 - 1/z^2}{2i} + 2\sqrt{2} (xs + iyt) \frac{z + 1/z}{2} + 2\sqrt{2} (xt - iys) \frac{z - 1/z}{2i} \right).$$

Сравнивая обе формулы, получаем

$$\overline{\mathcal{G}}_{n,m}(x, -y, 1/\bar{z}) = \mathcal{G}_{n,m}(x, y, z).$$

Другие преобразования функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$ при поворотах, зеркальных отражениях относительно осей координат и инверсии относительно единичной окружности комплексного параметра z показаны на рис. 4.4. Как видно из рисунка, достаточно исследовать функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$ только в круговом секторе $\{0 \leq |z| \leq 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}$, поскольку к этому случаю сводятся все остальные.

Вычислим еще асимптотику функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Используем для этого интегральное представление (4.9):

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z) = \frac{(-2i)^{n+m}}{\pi} e^{x^2+y^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-s^2-t^2+2\sqrt{2}i(sx+ty)} \times \\ \times \left(s \frac{z+1/z}{2} + t \frac{z-1/z}{2} \right)^n \left(s \frac{z-1/z}{2i} + t \frac{z+1/z}{2i} \right)^m ds dt \ominus$$

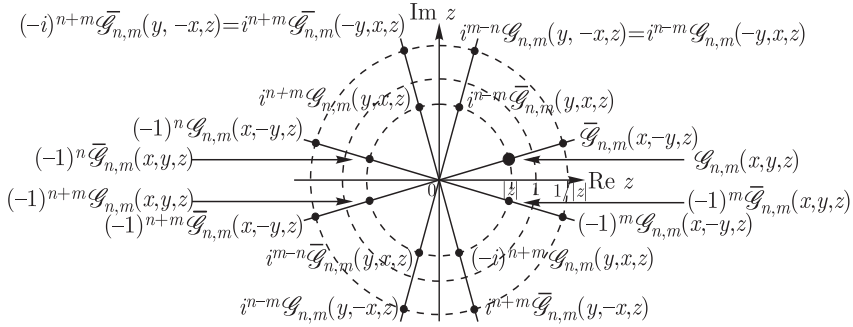


Рис. 4.4. Преобразования функций Эрмита–Лагерра–Гаусса в зависимости от местоположения точки z на комплексной плоскости. За основу выбрана функция, отмеченная жирной точкой, остальные функции выражаются через нее

разлагаем полиномиальную часть в асимптотический ряд

$$\begin{aligned} & \ominus \frac{(-2i)^{n+m}}{\pi i^m} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+m} e^{x^2+y^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-s^2-t^2+2\sqrt{2} i(sx+ty)} \times \\ & \times \left[(s+t)^{n+m} + (s+t)^{n+m-1}(s-t) \frac{n-m}{z^2} + \dots \right] ds dt \ominus \end{aligned}$$

и делаем замену $\xi = \frac{s+t}{\sqrt{2}}$, $\eta = \frac{s-t}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} & \ominus \frac{(-iz\sqrt{2})^{n+m}}{\pi i^m} e^{x^2+y^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\xi^2-\eta^2+2\sqrt{2} i(\xi \frac{x+y}{\sqrt{2}} + \eta \frac{x-y}{\sqrt{2}})} \times \\ & \times \left[\xi^{n+m} + \xi^{n+m-1} \eta \frac{n-m}{z^2} + \dots \right] d\xi d\eta = \\ & = (-i)^m \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{n+m} \left[\mathcal{G}_{n+m,0} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, 1 \right) + \right. \\ & \quad \left. + i \frac{n-m}{z^2} \mathcal{G}_{n+m-1,1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, 1 \right) + \dots \right] = \\ & = (-i)^m \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{n+m} \left[\mathcal{H}_{n+m,0} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{n-m}{z^2} \mathcal{H}_{n+m-1,1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, при $z \rightarrow \infty$ для любого $\arg z$ асимптотика дает одно и то же — повернутую моду Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{n+m,0}$ (см. первый

и последний кадры на рис. 4.3). Если $n + m = \text{const}$, то различие между асимптотиками функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$ для разных пар (n, m) проявляется только в $O(1/z^2)$.

Уже упомянутая универсальность функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$ при вычислении рядов (4.11) и достаточно большое число свободных параметров позволяют, варьируя эти параметры, получать варианты разложений одних функций Эрмита–Лагерра–Гаусса по другим, например,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) = & e^{-x^2-y^2} (-i)^m \cos^{(n+m)/2} 2\alpha \sum_{k=0}^{\min(n,m)} (-2i \operatorname{tg} 2\alpha)^k k! \binom{m}{k} \binom{n}{k} \times [1mm] \\ & \times H_{n-k} \left(\sqrt{2} \frac{x \cos \alpha + iy \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right) H_{m-k} \left(\sqrt{2} \frac{y \cos \alpha + ix \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

В частности, если $n = 0$ или $m = 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) = & e^{-x^2-y^2} (-i)^m \cos^{(n+m)/2} 2\alpha \times \\ & \times H_n \left(\sqrt{2} \frac{x \cos \alpha + iy \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y \cos \alpha + ix \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

и все многообразие функций Эрмита–Лагерра–Гаусса сводится к комплексным трансформациям аргументов полиномов Эрмита. Данное равенство не является уникальным свойством полиномов Эрмита содержать в себе весь набор общих функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$. Можно показать, что «случай нулевого индекса» тривиален, т. е. все функции — это в некотором смысле один объект. Например, при $m = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,0}(x, y | \alpha) = & \left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} \right)^{n/2} \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,0} \left(\frac{x \cos(\alpha + \beta) - iy \sin(\beta - \alpha)}{\sqrt{\cos 2\alpha \cos 2\beta}}, \frac{y \cos(\alpha + \beta) + ix \sin(\beta - \alpha)}{\sqrt{\cos 2\alpha \cos 2\beta}} \middle| \beta \right). \end{aligned}$$

Интересно отметить, что единый объект, содержащий в себе все функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$, когда один из индексов n, m обращается в нуль, появляется также в следующей геометрической интерпретации интегрального преобразования (4.2) (для определенности далее рассматривается случай $m = 0$). Пусть в пространстве (x, y, l) задано комплексное распределение

$$W(x, y, l) = (x + iy)^n \exp(-x^2 - 2ixy - y^2 - 2l^2). \quad (4.15)$$

Тогда проекция $W(x, y, l)$ на плоскость $y \cos \theta + l \sin \theta = 0$ (или преобразование Радона [43]) имеет вид

$$\begin{aligned} W_{\text{PR}}(x, y, \theta) &= \int_{\mathbb{R}} W(x, y \sin \theta + l \cos \theta, -y \cos \theta + l \sin \theta) dl = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{1 + \sin^2 \theta}} \left(\frac{\cos \theta}{2\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} \right)^n H_n \left(\frac{X + iY \sin \theta}{\cos \theta} \right) \times \\ &\times \exp \left(-\frac{X^2 + Y^2}{2} - iXY \sin \theta \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $X = 2x/\sqrt{1 + \sin^2 \theta}$, $Y = 2y/\sqrt{1 + \sin^2 \theta}$. Интегральное преобразование (4.2) при $m = 0$, благодаря формуле (4.14), можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, \alpha)) \mathcal{H}_{n,0}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \mathcal{G}_{n,0} \left(\frac{X}{\sqrt{2}}, \frac{Y}{\sqrt{2}} \middle| \alpha \right) \exp \left(-i\frac{X^2 - Y^2}{2} - \frac{\pi i n}{4} \right) = \\ = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\cos \alpha \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^n H_n \left(\frac{X + iY \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{X^2 + Y^2}{2} - i\frac{X^2 - Y^2}{2} - \frac{\pi i n}{4} \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $X = \frac{1}{2}(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$, $Y = \frac{1}{2}(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$. Из (4.16), (4.17) видно, что при $\sin \theta = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$, функции $W_{\text{PR}}(x, y, \theta)$ и $\mathcal{G}_{n,0}(x, y | \alpha)$ качественно подобны в переменных X, Y , если пренебречь мнимыми экспонентами. ¹⁾ Таким образом, все функции Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathcal{G}_{n,0}(x, y | \alpha)$ являются проекциями одного трехмерного комплексного распределения (4.15) на разные плоскости. Функции $\mathcal{H}_{n,0}(x, y) = e^{-x^2 - y^2} H_n(\sqrt{2} x)$ и $\mathcal{L}_{0,\pm n}(x, y) = e^{-x^2 - y^2} (x \pm iy)^n$ реализуются при $\theta = 0$ и $\theta = \pm\pi/2$ соответственно. На рис. 4.5 показаны проекции $W(x, y, l)$ для случая $n = 3$.

¹⁾ Наличие в аргументах полиномов Эрмита выражений, которые могут обращаться в бесконечность, не является препятствием для рассмотрения этих возможных случаев. И в (4.16), и в (4.17) присутствуют множители (в первой формуле $\cos^n \theta$, во второй $-(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^{n/2}$), приводящие в таких случаях к неопределенности вида $0 \cdot \infty$, которая раскрывается, если записать полиномы Эрмита в виде разложения по степеням x . Разложение по степеням x показывает также, что квадратный корень в (4.17) присутствует только в четных степенях, и формула (4.17) справедлива для любого α .

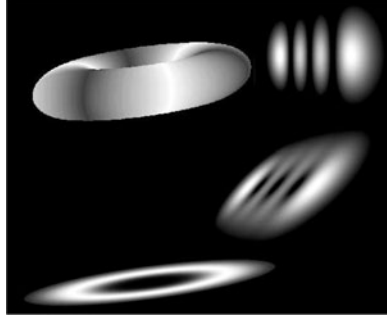


Рис. 4.5. Проекция трехмерного тороидального распределения имеют такие же интенсивности, что и функции $\mathcal{G}_{n,0}(x, y | \alpha)$. В данном случае показаны проекции при $\alpha = 0, \pi/8, \pi/4$ и $n = 3$. Аналогичные проекции для случая $n = 6$ показаны на рис. 4.2

Следующее равенство является обобщением формулы (4.13). Здесь уже разложение функции Эрмита–Лагерра–Гаусса с параметром α проводится по таким же функциям, но с параметром β :

$$\sum_{k=0}^{\min(n,m)} \left(2 \frac{\sin 2(\beta - \alpha)}{\cos 2\alpha} \right)^k k! \binom{m}{k} \binom{n}{k} \mathcal{G}_{n-k, m-k}(x_\alpha, y_\alpha | \beta) =$$

$$= \left(\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha} \right)^{\frac{n+m}{2}} \exp \left(2ixy \frac{\sin 2(\beta - \alpha)}{\cos 2\alpha \cos 2\beta} \right) \mathcal{G}_{n,m}(x_\beta, y_\beta | \alpha), \quad (4.18)$$

где $x_\alpha = \frac{x \cos \alpha + iy \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$, $y_\alpha = \frac{y \cos \alpha + ix \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$ и x_β, y_β — аналогичные выражения для параметра β .

Еще один вариант разложения функции Эрмита–Лагерра–Гаусса связан со значениями этих функций при $x = y = 0$:

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) = e^{-x^2 - y^2} \sum_{n_1=0}^n \sum_{m_1=0}^m \binom{n}{n_1} \binom{m}{m_1} \mathcal{G}_{n_1, m_1}(0, 0 | \alpha) \times$$

$$\times (2\sqrt{2})^{n+m-n_1-m_1} (x \cos \alpha + iy \sin \alpha)^{n-n_1} (x \sin \alpha - iy \cos \alpha)^{m-m_1}. \quad (4.19)$$

Здесь $\mathcal{G}_{n,m}(0, 0 | \alpha)$ — вещественное число, причем равное нулю, если $n + m$ нечетно. Другая форма записи данного разложения

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha) = e^{-x^2 - y^2} \sum_{k=0}^{[(n+m)/2]} \frac{(-1)^k}{k!} (2\sqrt{2})^{n+m-2k} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^k (x \cos \alpha + iy \sin \alpha)^n (x \sin \alpha - iy \cos \alpha)^m$$

интересна тем, что слагаемое, соответствующее индексу k , является однородным полиномом степени $n + m - 2k$. В частности, главная часть полинома, формирующего функцию Эрмита–Лагерра–Гаусса, такова:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^{n+m} (x \cos \alpha + iy \sin \alpha)^n (x \sin \alpha - iy \cos \alpha)^m &= \\ &= (2\sqrt{2})^{n+m} \sum_{k=0}^{n+m} i^k c_k^{(n,m)}(\alpha) x^{n+m-k} y^k. \end{aligned}$$

Для фигурирующих в формуле (4.19) чисел $\mathcal{G}_{n,m}(0,0|\alpha)$ можно привести несколько эквивалентных выражений:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2n+\delta, 2m+\delta}(0,0|\alpha) &= (-1)^{n+\delta} \cos^{n+m+\delta} 2\alpha \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \frac{(-1)^k (2m+\delta)! (2n+\delta)!}{(2k+\delta)! (m-k)! (n-k)!} (2 \operatorname{tg} 2\alpha)^{2k+\delta} = \\ &= (-1)^\delta \cos^{n+m+\delta} 2\alpha \left(\frac{d}{dt} \right)^{2m+\delta} (e^{t^2} H_{2n+\delta}(t \operatorname{tg} 2\alpha)) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{(-1)^{n+\min} 2^{2\min+\delta} (2|n-m|)!}{\cos^{n+m+1+\delta} 2\alpha (|n-m|)!} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2\min+\delta} \frac{1}{(1+t^2)^{|n-m|+1/2}} \Big|_{t=\operatorname{tg} 2\alpha} = \\ &= (-1)^\delta 2^{n+m+\delta} \frac{(2m+\delta)! (2n+\delta)!}{(n+m+\delta)!} c_{2n+\delta}^{(n+m+\delta, n+m+\delta)}(\alpha + \pi/4) = \\ &= (-1)^{n+\min+\delta} 2^{2\min+\delta} \frac{(2m+\delta)! (2n+\delta)!}{(n+m+\delta)!} \cos^{|n-m|} 2\alpha \times \\ &\quad \times P_{2\min+\delta}^{(|n-m|, |n-m|)}(\sin 2\alpha). \end{aligned}$$

Здесь $\delta = 0$ или 1 ; $\min = \min(n, m)$. Следует отметить, что в соответствии со строкой « $k = 0$ » в таблице индексы n, m в правой части можно менять местами, если делать при этом умножение на $(-1)^{n+m}$.

Рассмотрим теперь формулу, которая показывает зависимость функций Эрмита–Лагерра–Гаусса с аргументами, повернутыми на некоторый угол, от аналогичных функций без поворота:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(x \cos \gamma - y \sin \gamma, y \cos \gamma + x \sin \gamma | \theta) &= \\ &= e^{i(n-m)\varphi} \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k e^{i(n+m-2k)\omega} c_k^{(n,m)}(\beta) \mathcal{G}_{n+m-k,k}(x, y | \alpha). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь при заданных α, γ, θ параметры β, φ, ω определяются из соотношений

$$\begin{cases} e^{i(\omega+\varphi)} \cos \beta = \cos \gamma \cos(\theta - \alpha) + i \sin \gamma \sin(\theta + \alpha), \\ e^{i(\omega-\varphi)} \sin \beta = \cos \gamma \sin(\theta - \alpha) - i \sin \gamma \cos(\theta + \alpha). \end{cases}$$

И обратно, если заданы параметры α , β и ω , то уравнения для нахождения γ , θ , φ следующие:

$$\begin{cases} e^{-i\varphi}(\cos \gamma \cos \theta + i \sin \gamma \sin \theta) = e^{i\omega} \cos \alpha \cos \beta - e^{-i\omega} \sin \alpha \sin \beta, \\ e^{-i\varphi}(\cos \gamma \sin \theta + i \sin \gamma \cos \theta) = e^{i\omega} \sin \alpha \cos \beta + e^{-i\omega} \cos \alpha \sin \beta. \end{cases}$$

Формулу (4.20) можно переписать в более привычном виде:

$$\mathcal{G}_{n,m}(x \cos \gamma - y \sin \gamma, y \cos \gamma + x \sin \gamma | \theta) = \sum_{k=0}^{n+m} \lambda_k^{(n,m)} \mathcal{G}_{n+m-k,k}(x, y | \alpha),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(n,m)} &= (-1)^k (\cos \gamma \cos(\theta - \alpha) + i \sin \gamma \sin(\theta + \alpha))^{n-k} \times \\ &\quad \times (\cos \gamma \sin(\theta - \alpha) - i \sin \gamma \cos(\theta + \alpha))^{m-k} \times \\ &\quad \times P_k^{(n-k, m-k)}(\sin^2 \gamma \cos 2(\theta + \alpha) - \cos^2 \gamma \cos 2(\theta - \alpha)), \end{aligned}$$

но из выражения для коэффициентов $\lambda_k^{(n,m)}$ сразу не видно, что они сводятся к уже знакомым коэффициентам $c_k^{(n,m)}(\alpha)$.

Чтобы представить еще один вариант формулы (4.20), необходимо сказать несколько слов о D -функциях Вигнера. Традиционно эти функции появляются при исследовании вращений декартовой системы координат в \mathbb{R}^3 . Известно, что произвольный поворот системы координат может быть получен с помощью трех последовательных поворотов вокруг координатных осей: сначала поворот вокруг оси OZ на угол $\alpha \in [0, 2\pi)$, затем поворот вокруг новой оси OY_1 на угол $\beta \in [0, \pi]$, и наконец — поворот вокруг новой оси OZ_2 на угол $\gamma \in [0, 2\pi)$. Углы α , β , γ полностью характеризуют поворот системы координат и называются углами Эйлера. D -функции Вигнера $D_{m,m'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ определяются как матричные элементы оператора поворота $D(\alpha, \beta, \gamma)$ (см. исчерпывающее изложение в [44]). В частности, D -функции Вигнера возникают как коэффициенты разложения сферических функций $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ при повороте системы координат на углы Эйлера α , β , γ :

$$Y_{l,m}(\theta', \varphi') = D(\alpha, \beta, \gamma) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^l D_{m,m'}^l(\alpha, \beta, \gamma) Y_{l,m'}(\theta, \varphi).$$

Если ввести в рассмотрение нормированные функции

$$\mathcal{G}_{n,m}^N(x, y | \alpha) = \frac{\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)}{\sqrt{\pi} 2^{n+m-1} n! m!},$$

то равенство (4.20) можно переписать в виде [22, 31]

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{l-m, l+m}^N(r \cos \theta', r \sin \theta' | \varphi') &= \\ &= \sum_{m'=-l}^l D_{m,m'}^l(\alpha, \beta, \gamma) \mathcal{G}_{l-m', l+m'}^N(r \cos \theta, r \sin \theta | \varphi), \end{aligned}$$

где $l = 0, 1, \dots$; $m = -l, \dots, l$ и параметры θ, φ трансформируются в параметры θ', φ' по формулам

$$\begin{cases} e^{-\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}} \cos \frac{\beta}{2} = -\sin(\theta' - \theta) \cos(\varphi' + \varphi) + i \cos(\theta' - \theta) \sin(\varphi' - \varphi), \\ e^{\frac{i(\alpha-\gamma)}{2}} \sin \frac{\beta}{2} = \sin(\theta' - \theta) \sin(\varphi' + \varphi) + i \cos(\theta' - \theta) \cos(\varphi' - \varphi). \end{cases}$$

Таким образом, формулу (4.20) можно трактовать как изменение функции Эрмита–Лагерра–Гаусса под действием оператора поворота $D(\alpha, \beta, \gamma)$.

4.3. Интегральные преобразования функций Эрмита–Лагерра–Гаусса

Рассмотрим вопрос о вычислении интеграла

$$F_{n,m} = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2)) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \alpha) d\xi d\eta. \quad (4.21)$$

Найденные ранее интегралы такого рода, например, (3.4), (3.15), (4.5), позволяют предположить, что и интеграл (4.21) будет иметь аналогичный вид, а именно,

$$F_{n,m} = C_0 C_1^n C_2^m e^{i\Phi(x,y)} \mathcal{G}_{n,m}(X, Y | \theta),$$

где C_0, C_1 и C_2 — константы; $\Phi(x, y)$ — некоторая квадратичная фаза; X, Y — новые переменные, линейным образом зависящие от x, y ; θ — новое значение параметра функции $\mathcal{G}_{n,m}$.

Используя (4.7), найдем производящую функцию для $F_{n,m}$. Если затем удастся подобрать такие составляющие и линейные замены аргументов, что

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} F_{n,m} \frac{s^n t^m}{n! m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_0 e^{i\Phi(x,y)} \mathcal{G}_{n,m}(X, Y | \theta) \frac{(sC_1)^n (tC_2)^m}{n! m!},$$

то из сравнения производящих функций получится требуемый результат.

Уже на начальной стадии исследования интеграла (4.21) становится ясно, что форма записи $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ для общего квадратичного воздействия неудачна, т. к. почти сразу возникает необходимость комбинировать слагаемые в виде

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = \frac{a+c}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{a-c}{2}(\xi^2 - \eta^2) + 2b\xi\eta.$$

Поэтому, не изменяя общности, удобнее рассматривать исходный интеграл (4.21) в виде

$$F_{n,m} = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 + \eta^2) + ib\psi(\xi, \eta, \beta)) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \alpha) d\xi d\eta,$$

где $\psi(\xi, \eta, \beta) = (\xi^2 - \eta^2) \cos 2\beta + 2\xi\eta \sin 2\beta$.

Используя предложенный подход, можно показать, что

$$\begin{aligned} F_{n,m} &= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt[4]{\Delta_+ \Delta_-}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{ia(1+a^2-b^2)}{4\Delta_+ \Delta_-} (x^2 + y^2) - \frac{ib(1+b^2-a^2)}{4\Delta_+ \Delta_-} \psi(x, y, \beta) + \right. \\ &+ i(n-m)\varphi + \frac{i}{2}(n+m+1) \arg(1+b^2-a^2+2ia)\Big) \times \\ &\times \mathcal{G}_{n,m}(X \cos \gamma + Y \sin \gamma, Y \cos \gamma - X \sin \gamma | \theta). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь

$$\Delta_{\pm} = 1 + (a \pm b)^2, \quad X = \frac{x \cos \beta + y \sin \beta}{2\sqrt{\Delta_+}}, \quad Y = \frac{y \cos \beta - x \sin \beta}{2\sqrt{\Delta_-}}$$

и параметры γ , θ и φ определяются из уравнений

$$\begin{cases} \sin 2\theta = \sin 2\alpha \cos 2\omega + \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\omega, \\ e^{2i\gamma} \cos 2\theta = \cos 2\alpha \cos 2\beta + i(\sin 2\alpha \sin 2\omega - \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\omega), \\ e^{i\varphi \pm i\theta} = e^{i\omega} (\cos \gamma \mp \sin \gamma) (\cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha \sin \beta) + \\ + e^{-i\omega} (\mp \cos \gamma - \sin \gamma) (\cos \alpha \sin \beta - i \sin \alpha \cos \beta), \end{cases} \quad (4.23)$$

где $\omega = \frac{1}{2} \arg(1+a^2-b^2+2ib)$ — вспомогательный угол. Другой вариант записи тех же формул:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} (\cos \theta \cos \gamma - i \sin \theta \sin \gamma) = e^{i\omega} (\cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha \sin \beta), \\ e^{i\varphi} (\cos \theta \sin \gamma + i \sin \theta \cos \gamma) = e^{-i\omega} (-\cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta). \end{cases} \quad (4.24)$$

Экспоненциальная составляющая функции Эрмита–Лагерра–Гаусса в правой части (4.22) равна

$$\exp\left(-\frac{(1+a^2+b^2)(x^2+y^2) - 2ab\psi(x, y, \beta)}{4\Delta_+ \Delta_-}\right).$$

Необходимо отметить, что неоднозначность восстановления параметров γ , θ и φ из уравнений (4.23), (4.24) не влияет на конечный результат.

Например, при известных α, β, ω из первого равенства в (4.23) наряду с 2θ -решением можно выбрать $\pi - 2\theta$. Тогда из второго уравнения получатся соответственно γ_1 и γ_2 для первого и второго θ -решений, а из третьего — φ_1 и φ_2 . Однако, с помощью формул перехода, приведенных в таблице на стр. 68, можно показать, что одна тройка решений $(\gamma, \theta, \varphi)$ сводится к другой.

Выпишем ряд следствий, получающихся из (4.22) при некоторых частных значениях параметров a, b, α, β :

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 + \eta^2)) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \alpha) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}} \exp\left(-\frac{ia(x^2 + y^2)}{4(1+a^2)} + i(n+m+1) \operatorname{arctg} a\right) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}} \middle| \alpha\right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i(\xi^2 - \eta^2)) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \alpha) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{i(x^2 - y^2)}{8} + \frac{\pi i}{4}(n-m)\right) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{2\sqrt{2}}, \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{2\sqrt{2}} \middle| 0\right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + 2ib\xi\eta) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \alpha) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+b^2}} \exp\left(-\frac{ibxy}{2(1+b^2)}\right) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+b^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+b^2}} \middle| \alpha + \operatorname{arctg} b\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Преобразование функций Лагерра–Гаусса в функции Эрмита–Гаусса, обобщающее формулу (3.4), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2 + \eta^2) + i\sqrt{1+a^2}\psi(\xi, \eta, \beta)) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \pi/4) d\xi d\eta = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{2} \sqrt[4]{1+a^2}} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{i\psi(x, y, \beta)}{8(1+a^2)} + \frac{i}{2}(n+m+1) \operatorname{arctg} a + i(n-m)\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)\right) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{X+Y}{2\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{2\sqrt{2}} \middle| 0\right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\text{где } X = \frac{x \cos \beta + y \sin \beta}{\sqrt{1 + a\sqrt{1 + a^2 + a^2}}}, \quad Y = \frac{y \cos \beta - x \sin \beta}{\sqrt{1 - a\sqrt{1 + a^2 + a^2}}}.$$

Следующие два интеграла можно считать лоренцевыми аналогами формул (4.26), (4.27), поскольку квадратичные воздействия в них записаны в переменных, преобразованных по Лоренцу:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) \pm i \frac{(\xi - c\eta)^2 + (\eta - c\xi)^2}{1 - c^2}\right) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \alpha) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - c^2}{1 + c^2}} \exp\left(\mp i \frac{1 - c^2}{1 + c^2} \frac{x^2 + y^2}{8} \pm \frac{\pi i}{4}(n + m + 1)\right) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x + cy}{2\sqrt{2}\sqrt{1 + c^2}}, \frac{y + cx}{2\sqrt{2}\sqrt{1 + c^2}} \middle| \alpha \pm \operatorname{arctg} c\right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + 2i \frac{(\xi - c\eta)(\eta - c\xi)}{1 - c^2}\right) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \alpha) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - c^2}{1 + c^2}} \exp\left(-i \frac{1 - c^2}{1 + c^2} \frac{xy}{4} - i(n + m + 1) \operatorname{arctg} c\right) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x + cy}{2\sqrt{2}\sqrt{1 + c^2}}, \frac{y + cx}{2\sqrt{2}\sqrt{1 + c^2}} \middle| \alpha + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Еще один результат получается при исследовании вопроса об интегральных воздействиях, оставляющих неизменным параметр α функций Эрмита–Лагерра–Гаусса. Частичным ответом является формула (4.25). В общем случае ответ следующий:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + i \frac{c(1 + \lambda^2)}{1 - \lambda^2 c^2} (\xi^2 + \eta^2) + i \frac{\lambda(1 + c^2)}{1 - \lambda^2 c^2} \psi(\xi, \eta, \beta)\right) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \alpha) d\xi d\eta = \pi(-i)^{n+m} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 c^2}{(1 + \lambda^2)(1 + c^2)}} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{ic(1 - \lambda^2)}{4(1 + \lambda^2)(1 + c^2)} (x^2 + y^2) - \frac{i\lambda(1 - c^2)}{4(1 + \lambda^2)(1 + c^2)} \psi(x, y, \beta) + \right. \\ & \left. + i(n + m + 1) \operatorname{arctg} c + i(n - m)\varphi\right) \times \\ & \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x(\cos 2\beta - \lambda c) + y \sin 2\beta}{2\sqrt{(1 + \lambda^2)(1 + c^2)}}, \frac{y(\cos 2\beta + \lambda c) - x \sin 2\beta}{2\sqrt{(1 + \lambda^2)(1 + c^2)}} \middle| \alpha\right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Здесь $\alpha \in [0, \pi/4]$, $\lambda = \sin 2\beta / \operatorname{tg} 2\alpha$, $\varphi = \arg(\sin 2\alpha \cos 2\beta + i \sin 2\beta)$ и $\sqrt{1 - \lambda^2 c^2} = i\sqrt{|1 - \lambda^2 c^2|}$, если выражение под первым знаком квадратного корня в формуле (4.31) отрицательно.

При $c = 0$ и $\alpha = \pi/8$ формула (4.31) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i \sin 2\beta \psi(\xi, \eta, \beta)) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | \pi/8) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1 + \sin^2 2\beta}} \exp\left(-\frac{i \sin 2\beta}{4(1 + \sin^2 2\beta)} \psi(x, y, \beta) + \right. \\ & \quad \left. + i(n - m) \arg(\cos 2\beta + i\sqrt{2} \sin 2\beta)\right) \times \\ & \quad \times \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x \cos 2\beta + y \sin 2\beta}{2\sqrt{1 + \sin^2 2\beta}}, \frac{y \cos 2\beta - x \sin 2\beta}{2\sqrt{1 + \sin^2 2\beta}} \middle| \frac{\pi}{8}\right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Как видно из данного равенства, при изменении параметра β функция Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \pi/8)$ остается неизменной, лишь поворачиваясь и изменяясь в масштабе. Это позволяет поставить вопрос о нахождении функций, инвариантных к астигматическим воздействиям. Формула (4.32) показывает, что задача об астигматически-инвариантных функциях имеет непустое множество решений.

Обобщение интеграла (4.22) на функции Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$ не представляет особых трудностей, кроме громоздких выкладок. Итак, вычислим общий интеграл

$$\begin{aligned} F_{n,m} = & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) - (A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2)) \times \\ & \times G_{n,m}(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta, z) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $G_{n,m}$ — полиномиальная составляющая функции Эрмита–Лагерра–Гаусса: $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2} G_{n,m}(x, y, z)$. При этом a, b, c, d — вещественные параметры и A, B, C — такие комплексные параметры, чтобы квадратичная форма $\text{Re}(A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2)$ была положительно определенной (это необходимо для сходимости интеграла).

Введем обозначения:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

и сделаем в интеграле (4.33) замену переменных $(\xi, \eta) \rightarrow (u, v)$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} du dv & = \frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \det \Lambda d\xi d\eta, \quad x\xi + y\eta = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \\ & = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \Lambda^{-1} \Lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{r}, \Lambda^{-1} \mathbf{T} \rangle = \langle (\Lambda^{-1})^t \mathbf{r}, \mathbf{T} \rangle. \end{aligned}$$

Теперь сделаем замену переменных на выходе $(x, y) \rightarrow (X, Y)$:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^t \mathbf{r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_{n,m} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp \left[-i \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle \right] \times \\ &\quad \times G_{n,m} \left(\Lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, z \right) d\xi d\eta = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i \langle \mathbf{R}, \mathbf{T} \rangle - \langle \mathcal{B} \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle) \cdot G_{n,m}(\mathbf{T}, z) \frac{du dv}{\det \Lambda}. \end{aligned}$$

Квадратичная форма $\langle \mathcal{B} \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle$ была получена следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \mathcal{A} \Lambda^{-1} \Lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \Lambda^{-1} \Lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \langle \mathcal{A} \Lambda^{-1} \mathbf{T}, \Lambda^{-1} \mathbf{T} \rangle = \langle (\Lambda^{-1})^t \mathcal{A} \Lambda^{-1} \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle \Rightarrow \mathcal{B} = (\Lambda^{-1})^t \mathcal{A} \Lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Используем производящую функцию для полиномов $G_{n,m}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^{\infty} G_{n,m}(x, y, z) \frac{s^n t^m}{n! m!} &= \exp(-(s^2 - t^2) \cos 2\alpha - 2st \sin 2\alpha + \\ &\quad + 2\sqrt{2} x(s \cos \alpha + t \sin \alpha) - 2\sqrt{2} iy(t \cos \alpha - s \sin \alpha)) = \\ &= \exp(-s_\alpha^2 + t_\alpha^2 + 2\sqrt{2} x s_\alpha - 2\sqrt{2} iy t_\alpha), \end{aligned}$$

где $s_\alpha = s \cos \alpha + t \sin \alpha$, $t_\alpha = t \cos \alpha - s \sin \alpha$, $z = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^{\infty} F_{n,m} \frac{s^n t^m}{n! m!} &= \frac{\exp(t_\alpha^2 - s_\alpha^2)}{\det \Lambda} \times \\ &\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i \langle \mathbf{R}, \mathbf{T} \rangle - \langle \mathcal{B} \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + 2\sqrt{2} u s_\alpha - 2\sqrt{2} iv t_\alpha) du dv = \\ &= \frac{\exp(t_\alpha^2 - s_\alpha^2)}{\det \Lambda} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-\langle \mathcal{B} \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle - i \langle \mathbf{w}, \mathbf{T} \rangle) du dv = \\ &= \frac{\exp(t_\alpha^2 - s_\alpha^2)}{\det \Lambda} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\det \mathcal{B}}} \exp\left(\frac{1}{4} \langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle\right) \ominus \end{aligned}$$

где $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} s_\alpha \\ -2\sqrt{2} it_\alpha \end{pmatrix} - i\mathbf{R} = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} s_\alpha \\ -it_\alpha \end{pmatrix} - i\mathbf{R} = 2\sqrt{2} \mathbf{S} - i\mathbf{R}$.

Так как $\mathcal{B} = (\Lambda^{-1})^t \mathcal{A} \Lambda^{-1}$, то $\mathcal{B}^{-1} = \Lambda \mathcal{A}^{-1} \Lambda^t \Rightarrow \det \mathcal{B} = \det \Lambda^{-1} \times \det \mathcal{A} \cdot \det \Lambda^{-1} \Rightarrow \det \Lambda \sqrt{\det \mathcal{B}} = \sqrt{\det \mathcal{A}}$. Последнее равенство, кстати, позволяет в интеграле (4.33) брать вырожденные матрицы Λ .

Упростим теперь показатель экспоненты:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathcal{B}^{-1} (2\sqrt{2} \mathbf{S} - i\mathbf{R}), 2\sqrt{2} \mathbf{S} - i\mathbf{R} \rangle = \\ &= 8\langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{S}, \mathbf{S} \rangle - 2\sqrt{2} i \langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle - 2\sqrt{2} i \langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{R}, \mathbf{S} \rangle - \langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle = \\ &= 8\langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{S}, \mathbf{S} \rangle - 2\sqrt{2} i \langle \mathbf{S}, \mathcal{B}^{-1} \mathbf{R} + (\mathcal{B}^{-1})^t \mathbf{R} \rangle - \langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое:

- $\langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle = \langle \Lambda \mathcal{A}^{-1} \Lambda^t \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle = \langle \mathcal{A}^{-1} \Lambda^t \mathbf{R}, \Lambda^t \mathbf{R} \rangle = \langle \mathcal{A}^{-1} \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$, поскольку $\mathbf{R} = (\Lambda^{-1})^t \mathbf{r}$.
- \mathcal{A} — симметрическая матрица, поэтому для любой Λ матрица $\Lambda^t \mathcal{A} \Lambda$ также симметрическая. $\Rightarrow (\mathcal{B}^{-1})^t = \mathcal{B}^{-1}$. \Rightarrow

$$\langle \mathbf{S}, \mathcal{B}^{-1} \mathbf{R} + (\mathcal{B}^{-1})^t \mathbf{R} \rangle = 2\langle \mathbf{S}, \mathcal{B}^{-1} \mathbf{R} \rangle = 2\langle \mathbf{S}, \Lambda \mathcal{A}^{-1} \mathbf{r} \rangle = 2\langle \Lambda^t \mathbf{S}, \mathcal{A}^{-1} \mathbf{r} \rangle.$$

- $\langle \mathcal{B}^{-1} \mathbf{S}, \mathbf{S} \rangle = \langle \Lambda \mathcal{A}^{-1} \Lambda^t \mathbf{S}, \mathbf{S} \rangle = \langle \mathcal{A}^{-1} \Lambda^t \mathbf{S}, \Lambda^t \mathbf{S} \rangle.$

$$\begin{aligned} & \left(\ominus \frac{\pi \exp\left(-\frac{1}{4} \langle \mathcal{A}^{-1} \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle\right)}{\sqrt{\det \mathcal{A}}} \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp\left(t_\alpha^2 - s_\alpha^2 + 2\langle \mathcal{A}^{-1} \Lambda^t \mathbf{S}, \Lambda^t \mathbf{S} \rangle - \sqrt{2} i \langle \mathcal{A}^{-1} \mathbf{r}, \Lambda^t \mathbf{S} \rangle\right) \right) \left(\ominus \right) \end{aligned}$$

$$\text{Поскольку } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ то } \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \begin{pmatrix} C & -B \\ -B & A \end{pmatrix}. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left(\ominus \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}} \exp\left(-\frac{Cx^2 - 2Bxy + Ay^2}{4(AC - B^2)}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp\left(t_\alpha^2 - s_\alpha^2 + 2\langle \mathcal{A}^{-1} \Lambda^t \mathbf{S}, \Lambda^t \mathbf{S} \rangle - \sqrt{2} i \langle \mathcal{A}^{-1} \mathbf{r}, \Lambda^t \mathbf{S} \rangle\right) \right). \end{aligned}$$

Для записи $F_{n,m}$ в терминах полиномов $G_{n,m}$ осталось записать последнюю экспоненту в виде

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\psi(s_0 s, t_0 t, \theta) + \right. \\ & \quad \left. + 2\sqrt{2} X(s_0 s \cos \theta + t_0 t \sin \theta) - 2\sqrt{2} i Y(t_0 t \cos \theta - s_0 s \sin \theta)\right). \end{aligned}$$

Тогда $F_{n,m}$ примет вид

$$F_{n,m} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}} \exp\left(-\frac{Cx^2 - 2Bxy + Ay^2}{4(AC - B^2)}\right) s_0^n t_0^m G_{n,m}(X, Y, w),$$

где $w = e^{i\theta}$. Уже видно, что X, Y — это линейные комбинации x, y . Осталось только, используя равенства

$$\begin{aligned} & [(s_0 s)^2 - (t_0 t)^2] \cos 2\theta - 2s_0 s t_0 t \sin 2\theta = \\ & = (s^2 - t^2) \cos 2\alpha + 2st \sin 2\alpha - 2\langle \mathcal{A}^{-1} \Lambda^t \mathbf{S}, \Lambda^t \mathbf{S} \rangle, \end{aligned}$$

$$2Y(t_0 t \cos \theta - s_0 s \sin \theta) - 2iX(s_0 s \cos \theta + t_0 t \sin \theta) = \langle \mathcal{A}^{-1} \mathbf{r}, \Lambda^t \mathbf{S} \rangle,$$

найти конкретные выражения для s_0 , t_0 , w , X , Y .

После их нахождения можно записать окончательный ответ:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) - (A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2)) \times \\ & \quad \times G_{n,m}(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta, z) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}} (\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2)^{\frac{n+m}{4}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{\frac{n-m}{4}} \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{Cx^2 - 2Bxy + Ay^2}{4(AC-B^2)}\right) G_{n,m}(X, Y, w), \quad (4.34) \end{aligned}$$

где параметры в правой части равенства определяются следующей процедурой:

- $z = e^{i\alpha}$, т.е. находим вспомогательное комплексное число α или заменяем в последующих выражениях $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$ соответственно на $\frac{z + 1/z}{2}$, $\frac{z - 1/z}{2i}$, $\frac{z^2 + 1/z^2}{2}$, $\frac{z^2 - 1/z^2}{2i}$.
- определяем матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha + ic \sin \alpha & a \sin \alpha - ic \cos \alpha \\ b \cos \alpha + id \sin \alpha & b \sin \alpha - id \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- вычисляем параметры λ_1 , λ_2 , λ_3 , \mathcal{X} и \mathcal{Y} :

$$\lambda_1 = \cos 2\alpha - \frac{2}{AC-B^2} (Ca_{11}^2 - 2Ba_{11}a_{21} + Aa_{21}^2),$$

$$\lambda_2 = \sin 2\alpha - \frac{2}{AC-B^2} (Ca_{11}a_{12} - B(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + Aa_{21}a_{22}),$$

$$\lambda_3 = \cos 2\alpha + \frac{2}{AC-B^2} (Ca_{12}^2 - 2Ba_{12}a_{22} + Aa_{22}^2),$$

$$\mathcal{X} = \frac{x(Ca_{11} - Ba_{21}) + y(-Ba_{11} + Aa_{21})}{AC-B^2},$$

$$\mathcal{Y} = \frac{x(Ca_{12} - Ba_{22}) + y(-Ba_{12} + Aa_{22})}{AC-B^2}.$$

- находим X , Y и $w = e^{i\theta}$:

$$e^{2i\theta} = w^2 = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3} + i\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2}},$$

$$X = -\frac{i}{2\sqrt[4]{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2}} \left(\mathcal{X} \sqrt[4]{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \cos \theta + \mathcal{Y} \sqrt[4]{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}} \sin \theta \right),$$

$$Y = \frac{1}{2\sqrt[4]{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2}} \left(\mathcal{Y} \sqrt[4]{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}} \cos \theta - \mathcal{X} \sqrt[4]{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \sin \theta \right).$$

Избавиться от всех промежуточных параметров довольно трудно, однако некоторый прогресс все-таки возможен. Например, можно показать, что выражение $\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2$ не зависит от α :

$$\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2 = 1 + \frac{4(ad-bc)^2 - 2[A(b^2 + d^2) - 2B(ab + cd) + C(a^2 + c^2)]}{AC - B^2}.$$

Пример 1. Вычислим интеграл

$$F_{n,m} = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi + y\eta) + 2i\xi\eta} \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta, z) d\xi d\eta.$$

В данном случае $a=d=1$, $b=c=0$, $A=C=1$, $B=-i$. \Rightarrow Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ i \sin \alpha & -i \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Находим параметры λ_1 , λ_2 , λ_3 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos 2\alpha - (a_{11}^2 + 2ia_{11}a_{21} + a_{21}^2) = \sin 2\alpha, \\ \lambda_2 &= \sin 2\alpha - (a_{11}a_{12} + i(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + a_{21}a_{22}) = -\cos 2\alpha, \\ \lambda_3 &= \cos 2\alpha + (a_{12}^2 + 2ia_{12}a_{22} + a_{22}^2) = \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} w^2 &= \sin 2\alpha - i \cos 2\alpha = -ie^{2i\alpha} \Rightarrow w = ze^{-\pi i/4} \Rightarrow \theta = \alpha - \frac{\pi}{4}. \\ \left. \begin{aligned} \mathcal{X} &= x \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2} + iy \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{2} \\ \mathcal{Y} &= x \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2} + iy \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow X = \frac{y}{2\sqrt{2}}, Y = \frac{x}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

И, наконец,

$$\begin{aligned} F_{n,m} &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2 + 2ixy + y^2}{8}\right) G_{n,m}\left(\frac{y}{2\sqrt{2}}, \frac{x}{2\sqrt{2}}, ze^{-\pi i/4}\right) = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} (-i)^{n+m} \exp\left(-\frac{ixy}{4}\right) \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}, \frac{y}{2\sqrt{2}}, ze^{\pi i/4}\right), \end{aligned}$$

поскольку $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, iz) = i^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(y, x, z)$.

Пример 2. Если $\operatorname{Re} B \in (-1, 1)$, то

$$\begin{aligned} F_{n,m} &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi + y\eta) - 2B\xi\eta} \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta, z) d\xi d\eta = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1-B^2}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{Bxy}{2(1-B^2)}\right) \mathcal{G}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1-B^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1-B^2}}, z\sqrt{\frac{1-B}{1+B}}\right). \end{aligned}$$

Как следствие, при чисто мнимом B получаем $|w| = |z|$.

Пример 3. Если

$$F_{n,m} = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi+y\eta)+i(A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2)} \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta, z) d\xi d\eta,$$

где A, B, C — вещественные числа, то при $|z| = 1$ вспомогательные параметры λ_1, λ_3 оказываются комплексно-сопряженными, а параметр λ_2 вещественным. Поэтому

$$w^2 = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3} + i\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2}} = \frac{|\lambda_1| + i\lambda_2}{\sqrt{|\lambda_1|^2 + \lambda_2^2}} \Rightarrow |w| = 1.$$

Таким образом, и в данном случае $|w| = |z|$.

Рассмотрим теперь некоторые одномерные интегралы типа Фурье, связанные с функциями Эрмита–Лагерра–Гаусса. Их вычисление сопряжено с большими трудностями, нежели вышеприведенное вычисление двумерных интегралов. Причина заключается в том, что производящая функция для семейства функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$ именно в двумерном варианте является обычной экспонентой с квадратичным показателем, т. е. весьма удобной для интегрирования функций. В одномерном случае, как уже отмечалось ранее (третья из формул (4.11)), соответствующие выражения более громоздки и кроме экспоненты содержат некоторые полиномы. Поэтому приведем только два одномерных интеграла, которые содержат функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-2x^2-2x(b+c)} H_n(x+b) H_m(x+c) dx &= \\ &= \sqrt{\pi} \frac{(-1)^m e^{(b+c)^2/2}}{2^{(n+m+1)/2}} H_{n+m} \left(\frac{b-c}{\sqrt{2}} \right), \\ \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+ax} H_n(x+b) H_m(x+c) dx &= \\ &= \sqrt{\pi} e^{\frac{a^2}{4}} \cdot \begin{cases} 2^m m! (a+2b)^{n-m} L_m^{n-m} \left(-\frac{1}{2}(a+2b)(a+2c) \right) & (n \geq m), \\ 2^n n! (a+2c)^{m-n} L_n^{m-n} \left(-\frac{1}{2}(a+2b)(a+2c) \right) & (n \leq m). \end{cases} \end{aligned}$$

По сути оба вышеприведенных интеграла можно рассматривать как примеры интегралов по некоторым прямым на декартовой плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Вычисление общего интеграла такого рода:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-At^2+Bt} \mathcal{G}_{n,m}(at+b, ct+d, z) dt,$$

также возможно.

При выборе путей интегрирования на плоскости, ассоциированных с полярной системой координат, возникают интегралы

$$\int_0^\infty e^{-Ar^2+Br} \mathcal{G}_{n,m}(x_0 + r \cos \alpha, y_0 + r \sin \alpha, z) dr,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\beta} \mathcal{G}_{n,m}(x \cos \beta + y \sin \beta, y \cos \beta - x \sin \beta, z) d\beta,$$

вычисление которых можно осуществить или с помощью метода производящих функций, или с помощью алгебраических разложений, полученных в предыдущем параграфе. Например, запишем формулу (4.20) при $\alpha = \pi/4$ и $\gamma = 0$:

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \theta) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k c_k^{(n,m)} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \mathcal{G}_{n+m-k,k} \left(x, y \left| \frac{\pi}{4} \right. \right).$$

Тогда, делая замену переменных и используя инвариантность функций Лагерра–Гаусса к повороту, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(x \cos \beta + y \sin \beta, y \cos \beta - x \sin \beta | \theta) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \times \\ &\times c_k^{(n,m)} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \mathcal{G}_{n+m-k,k} \left(x \cos \beta + y \sin \beta, y \cos \beta - x \sin \beta \left| \frac{\pi}{4} \right. \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k c_k^{(n,m)} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) e^{i\beta(2k-n-m)} \mathcal{G}_{n+m-k,k} \left(x, y \left| \frac{\pi}{4} \right. \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} e^{ip\beta} \mathcal{G}_{n,m}(x \cos \beta + y \sin \beta, y \cos \beta - x \sin \beta | \theta) d\beta = \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k c_k^{(n,m)} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \mathcal{G}_{n+m-k,k} \left(x, y \left| \frac{\pi}{4} \right. \right) \int_0^{2\pi} e^{i\beta(2k+p-n-m)} d\beta \ominus \end{aligned}$$

Последний интеграл отличен от нуля в том и только том случае, когда найдется такое $k \in \overline{0, n+m}$, что $2k + p - n - m = 0$. Иными словами, $n + m - p$ должно быть четным неотрицательным числом, не превосходящим $2(n + m)$. Обозначая $2N = n + m - p$, из равенства $2k + p - n - m = 0$ получаем $k = N$ и

$$\begin{aligned} &\ominus 2\pi (-1)^N c_N^{(n,m)} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \mathcal{G}_{n+m-N,N} \left(x, y \left| \frac{\pi}{4} \right. \right) = \\ &= \pi \cdot 2^{N+p+1} N! c_N^{(n,m)} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \mathcal{L}_{N,p}(x, y). \end{aligned}$$

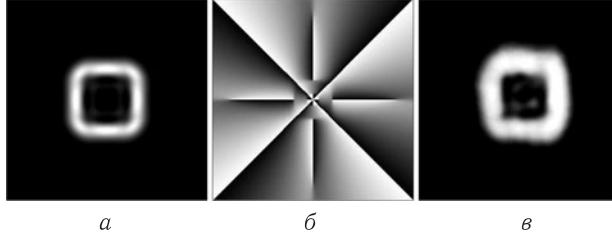


Рис. 4.6. Интенсивность (а), фаза (б) функции Эрмита–Лагерра–Гаусса и ее оптическая реализация (в). Фазовое распределение показывает наличие у функции двенадцати простых изолированных нулей. Восемь нулей, располагающихся в центральной части, имеют тип z , поскольку при обходе вокруг каждого из них против часовой стрелки получается набег фазы $+2\pi$. Четыре нуля на периферии имеют тип \bar{z} , т. к. для них подобный обход дает набег фазы -2π . Точка в центре не является нулем: присутствие лишь черного и белого цветов в ее окрестности говорит о том, что там происходит склейка фаз 0 и 2π

Таким образом, справедлив следующий результат: если целые числа $n \geq 0$, $m \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$ таковы, что $\frac{1}{2}(n + m - p)$ — некоторое целое число от 0 до $n + m$ включительно, то

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\beta} \mathcal{G}_{n,m}(x \cos \beta + y \sin \beta, y \cos \beta - x \sin \beta | \theta) d\beta = \\ = \pi \cdot 2^{N+p+1} N! c_N^{(n,m)} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \mathcal{L}_{N,p}(x, y). \quad (4.35)$$

В противном случае, этот интеграл равен нулю. Следует также отметить, что при $\theta = \frac{\pi}{4}$ (т. е. для функции Лагерра–Гаусса) найденный интеграл отличен от нуля только при $p = n - m$ (т. е. при $N = m$) в силу равенства $c_N^{(n,m)}(0) = (-1)^m \delta_{N,m}$.

Исследование функций Эрмита–Лагерра–Гаусса закончим следующим замечанием. Функции $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)$ при $|z| \neq 1$ возникают в оптических экспериментах как самостоятельные объекты, которые первоначально (на стадии α -параметризации) рассматривались как линейные комбинации функций $\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)$. Пример на рис. 4.6 показывает, что среди представителей $\mathcal{G}_{n,m}(x, y, r e^{i\alpha})$ находятся не только функции Лагерра–Гаусса, имеющие кольцевую форму интенсивности, но и функции с интенсивностью в форме границы квадрата. Тем самым α -переход (при $r = 1$) от функций Эрмита–Гаусса, допускающих разделение переменных в виде $f_1(x)f_2(y)$, к функциям Лагерра–Гаусса, допускающим аналогичное разделение переменных в полярных координатах, дополняется r -переходом (при фиксированном α), соответствующим трансформации интенсивности из круговой в квадратную. Это объединение функциональной и визуальной точек зрения является еще одним доводом в пользу теоретического изучения функций Эрмита–Лагерра–Гаусса с комплексифицированным параметром α .

4.4. Энергия, угловой момент и другие интегральные инварианты

Как показано в [45], световое поле может обладать не только импульсом, но и моментом импульса, или угловым моментом. Данное свойство светового поля представляет интерес, поскольку этот угловой момент может полностью или частично передаваться среде, в которой распространяется световое поле, оптическим элементам, либо другим объектам, находящимся в этом поле. Данное свойство представляет интерес, в частности, для расширения возможностей микроманипулирования.

Найдем момент импульса вращения, приходящийся на единицу энергии светового поля. Электрическое поле эллиптически поляризованного пучка имеет вид $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_l)e^{i(kl - \omega t)}$, где $k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$ и

$$E_x = F(x, y, l) \cos \alpha, \quad E_y = iF(x, y, l) \sin \alpha, \quad E_l = E_l.$$

Из уравнения Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ находим связь между продольной и поперечной компонентами электрического вектора:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \sin \alpha + ikE_l + \frac{\partial E_l}{\partial l} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E_l &= -e^{-ikl} \int e^{ikl} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + i \frac{\partial F}{\partial y} \sin \alpha \right) dl = \\ &= \frac{i}{k} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + i \frac{\partial F}{\partial y} \sin \alpha \right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Из уравнения Максвелла $\mathbf{B} = \frac{1}{ik_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}$ находим компоненты магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{ik_0} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{i}{k_0} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial l} \\ E_x & E_y & E_l \end{vmatrix} = \\ &= \frac{k}{k_0} (-iF \sin \alpha) \mathbf{i} + \frac{k}{k_0} (F \cos \alpha) \mathbf{j} \\ &+ \frac{1}{k_0} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin \alpha + i \frac{\partial F}{\partial y} \cos \alpha \right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Усредненная по времени угловая плотность момента определяется следующим выражением [45]:

$$M_l = \frac{1}{8\pi c} \operatorname{Re}[\mathbf{r} \times (\varepsilon \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{B}})]_l.$$

Подставляя в это выражение составляющие электрического и магнитного поля, получим

$$\begin{aligned}
M_l &= -\frac{\varepsilon}{8\pi c} \operatorname{Re} [x(E_x \bar{B}_l - E_l \bar{B}_x) + y(E_y \bar{B}_l - E_l \bar{B}_y)] = \\
&= -\frac{\varepsilon}{8\pi c k_0} \operatorname{Re} \left[x \left\{ F \cos \alpha \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \sin \alpha - i \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \cos \alpha \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + i \frac{\partial F}{\partial y} \sin \alpha \right) i \bar{F} \sin \alpha \right\} + \right. \\
&\quad \left. + y \left\{ i F \sin \alpha \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \sin \alpha - i \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \cos \alpha \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + i \frac{\partial F}{\partial y} \sin \alpha \right) \bar{F} \cos \alpha \right\} \right] = \\
&= -\frac{\varepsilon}{8\pi c k_0} \operatorname{Re} \left[x \left\{ -i F \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \cos^2 \alpha + i \bar{F} \frac{\partial F}{\partial y} \sin^2 \alpha + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(F \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \bar{F} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \cos \alpha \sin \alpha \right\} + \right. \\
&\quad \left. + y \left\{ -i \bar{F} \frac{\partial F}{\partial x} \cos^2 \alpha + i F \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \sin^2 \alpha + \left(F \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + \bar{F} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cos \alpha \sin \alpha \right\} \right] = \\
&= -\frac{\varepsilon}{8\pi c k_0} \left[-x \operatorname{Im} \left(\bar{F} \frac{\partial F}{\partial y} \right) - y \operatorname{Im} \left(F \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) (F \bar{F}) \right] = \\
&= \frac{\varepsilon}{8\pi c k_0} \operatorname{Im} \left[\bar{F} \left(x \frac{\partial F}{\partial y} - y \frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] - \frac{\varepsilon \sin 2\alpha}{16\pi c k_0} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) |F|^2 = \\
&= M_1 + M_2.
\end{aligned}$$

Здесь слагаемое M_2 , зависящее от α , — это поляризационная составляющая углового момента.

Объемная плотность энергии светового поля W определяется как

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi} |F|^2.$$

Если

$$|F(x, y, l)| < \frac{C}{r^{1+\delta}}, \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \delta > 0,$$

то, интегрируя по частям, получаем

$$\iint_{\mathbb{R}^2} M_2 dx dy = \frac{\varepsilon \sin 2\alpha}{8\pi c k_0} \iint_{\mathbb{R}^2} |F|^2 dx dy,$$

и удельный поляризационный момент равен

$$L_\sigma = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} M_2 dx dy}{\iint_{\mathbb{R}^2} W dx dy} = \frac{\sin 2\alpha}{\omega},$$

где ω — угловая частота света.

Известно [18, 46, 47], что при распространении в зоне Френеля энергия пучка и его полный угловой момент

$$E = \iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y, l) dx dy, \quad L = \frac{1}{E} \iint_{\mathbb{R}^2} M(x, y, l) dx dy$$

являются интегральными инвариантами. Здесь

$$I(x, y, l) = |F(x, y, l)|^2$$

— интенсивность поля и

$$M(x, y, l) = \operatorname{Im} \left[\overline{F}(x, y, l) \left(x \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, l) - y \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, l) \right) \right]$$

— плотность углового момента ¹⁾. В этом параграфе рассматривается вопрос получения других интегральных инвариантов как для световых полей общего вида, так и для спиральных пучков.

Исследование по фазовой проблеме в оптике в двумерном случае [48, 49] выявило важную роль вихревой составляющей (компоненты) потока световой энергии, а именно, комплексная амплитуда поля $F(x, y, l) = \sqrt{I(x, y, l)} e^{i\phi(x, y, l)}$ может быть восстановлена, если на некоторой плоскости $l = l_0$ в зоне Френеля известны интенсивность поля $I(x, y)$, ее производная по направлению $\frac{\partial I}{\partial l}(x, y)$ и скалярная функция

$$\operatorname{rot}_0 \mathbf{j}(x, y) = -\frac{2}{k} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial y} \right) = \frac{2}{k} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} \right),$$

которая является проекцией ротора вектора потока световой энергии на направление распространения ²⁾. В общем случае, эту функцию

¹⁾ Другие эквивалентные выражения:

$$M = \operatorname{Im} \left(\overline{F} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) = I \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = I \left(x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} 0 & F & \overline{F} \\ x & F_x & \overline{F}_x \\ y & F_y & \overline{F}_y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & u & v \\ x & u_x & v_x \\ y & u_y & v_y \end{vmatrix},$$

где $\alpha = \arg(x + iy)$, $I = |F|^2$, $\phi = \arg F$, $u = \operatorname{Re} F$, $v = \operatorname{Im} F$.

²⁾ Другие эквивалентные выражения:

$$\operatorname{rot}_0 \mathbf{j} = -\frac{2}{kr} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} \right) = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} I_x & I_y \\ \phi_x & \phi_y \end{vmatrix} = \frac{1}{kr} \begin{vmatrix} I_r & I_\alpha \\ \phi_r & \phi_\alpha \end{vmatrix} = \frac{2}{k} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = \arg(x + iy)$, $I = |F|^2$, $\phi = \arg F$, $u = \operatorname{Re} F$, $v = \operatorname{Im} F$.

(далее для краткости будем называть ее функцией ротора, или просто ротором) не удастся восстановить из измерений интенсивности, однако известны некоторые ее свойства [48]:

1. Если (x_0, y_0) — точка экстремума интенсивности и $I(x_0, y_0) \neq 0$, то $\text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0) = 0$. Если же $I(x_0, y_0) = 0$, то

$$|\text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0)| = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right)^2} (x_0, y_0).$$

2. Если (x_0, y_0) — простой нуль $F(x, y)$ и C — контур, охватывающий только этот нуль поля F , то

$$\oint_C \nabla \phi \, d\mathbf{r} = 2\pi \, \text{sgn} \, \text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0).$$

3. Имеет место принцип сохранения вихревой компоненты поля $F(x, y, l)$: для любой плоскости в зоне Френеля справедливо равенство

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \, dx \, dy = 0.$$

Поиск интегральных инвариантов для световых полей общего вида удобно осуществлять, используя разложение их комплексной амплитуды по функциям Эрмита–Гаусса (см. формулы на стр. 31).

Если ввести обозначения $X = \sqrt{2} \, x/\rho|\sigma|$, $Y = \sqrt{2} \, y/\rho|\sigma|$, то выражения для плотности углового момента и скалярной функции ротора вектора потока световой энергии примут вид

$$\begin{aligned} M &= -\frac{e^{-X^2-Y^2}}{|\sigma|^2} \text{Im} \sum_{n_1, m_1=0}^{\infty} \sum_{n_2, m_2=0}^{\infty} c_{n_1, m_1} \bar{c}_{n_2, m_2} e^{i(n_2+m_2-n_1-m_1) \arg \sigma} \times \\ &\times H_{n_1}(X) H_{m_1}(Y) \left[2m_2 X H_{m_2-1}(Y) H_{n_2}(X) - 2n_2 Y H_{n_2-1}(X) H_{m_2}(Y) \right] = \\ &= -\frac{e^{-X^2-Y^2}}{|\sigma|^2} \text{Im} e^{i \arg \sigma} \sum_{\substack{n_1, m_1 \\ n_2, m_2}} c_{n_1, m_1} e^{i(n_2+m_2-n_1-m_1) \arg \sigma} H_{n_1}(X) H_{m_1}(Y) \times \\ &\times \left[\bar{c}_{n_2, m_2+1} (m_2+1) H_{n_2+1}(X) H_{m_2}(Y) - \right. \\ &\left. - \bar{c}_{n_2+1, m_2} (n_2+1) H_{n_2}(X) H_{m_2+1}(Y) \right]. \quad (4.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}_0 \mathbf{j} &= -\frac{4e^{-X^2-Y^2}}{k\rho^2|\sigma|^3} \text{Im} \sum_{\substack{n_1, m_1 \\ n_2, m_2}} e^{i(n_2+m_2-n_1-m_1) \arg \sigma} H_{n_1}(X) H_{m_2}(Y) \times \\ &\times \left[c_{n_1, m_1} \bar{c}_{n_2+1, m_2} (n_2+1) H_{n_2}(X) H_{m_1+1}(Y) - \right. \\ &\left. - c_{n_1, m_1+1} \bar{c}_{n_2, m_2} (m_1+1) H_{n_2+1}(X) H_{m_1}(Y) \right]. \quad (4.37) \end{aligned}$$

В процессе вычислений несколько раз использовалось рекуррентное соотношение для многочленов Эрмита: $2tH_k(t) = H_{k+1}(t) + 2kH_{k-1}(t)$.

Разложение (4.36) и свойство ортогональности функций Эрмита–Гаусса позволяют легко еще раз получить закон сохранения полного углового момента:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} M dx dy = -\frac{\rho^2}{2} \operatorname{Im} e^{i \arg \sigma} \sum_{\substack{n_1, m_1 \\ n_2, m_2}} c_{n_1, m_1} e^{i(n_2 + m_2 - n_1 - m_1) \arg \sigma} \times \\ \times \left[\underbrace{\bar{c}_{n_2, m_2+1} (m_2+1) \pi 2^{n_1+m_1} n_1! m_1!}_{n_1=n_2+1, m_1=m_2} - \underbrace{\bar{c}_{n_2+1, m_2} (n_2+1) \pi 2^{n_1+m_1} n_1! m_1!}_{n_1=n_2, m_1=m_2+1} \right] =$$

(избавляемся от индексов n_1, m_1 , оставляя n_2, m_2 , которые переобозначаем n, m)

$$= -\frac{\rho^2}{2} \operatorname{Im} e^{i \arg \sigma} \sum_{n, m=0}^{\infty} \pi 2^{n+m+1} (n+1)! (m+1)! e^{-i \arg \sigma} \times \\ \times \left[c_{n+1, m} \bar{c}_{n, m+1} - c_{n, m+1} \bar{c}_{n+1, m} \right] = \\ = 2\pi \rho^2 \sum_{n, m=0}^{\infty} \operatorname{Im} [c_{n, m+1} \bar{c}_{n+1, m}] 2^{n+m} (n+1)! (m+1)! = \\ = \frac{\pi \rho^2}{2} \sum_{n, m=1}^{\infty} \operatorname{Im} [c_{n-1, m} \bar{c}_{n, m-1}] 2^{n+m} n! m!.$$

Поскольку для энергии разложение имеет вид

$$E = \iint_{\mathbb{R}^2} I dx dy = \frac{\pi \rho^2}{2} \sum_{n, m=0}^{\infty} |c_{nm}|^2 2^{n+m} n! m!,$$

то для полного углового момента произвольного светового поля F получается следующая зависимость от коэффициентов разложения поля по функциям Эрмита–Гаусса:

$$L = \frac{\sum_{n, m=1}^{\infty} \operatorname{Im} [c_{n-1, m} \bar{c}_{n, m-1}] 2^{n+m} n! m!}{\sum_{n, m=0}^{\infty} |c_{nm}|^2 2^{n+m} n! m!}.$$

Если для исходного поля $F(x, y, 0)$ известно разложение по функциям Лагерра–Гаусса:

$$F(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n, m} \mathcal{L}_{n, m} \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho} \right),$$

то аналогичное представление для полного углового момента будет следующим:

$$L = \frac{\sum_{n,m=0}^{\infty} m \frac{(n+m)!}{2^m n!} [|c_{n,m}|^2 - |c_{n,-m}|^2]}{\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{2^m n!} [|c_{n,m}|^2 + |c_{n,-m}|^2]}.$$

Сформулируем некоторые известные или очевидные результаты, вытекающие из полученных формул:

1. Для любого поля F полный угловой момент не меняется при распространении в зоне Френеля.
2. Если исходное поле вещественно, то $L = 0$.
3. Если поле четно или нечетно по каждой из переменных x , y , то $L = 0$.
4. Если поле имеет вид $e^{im\alpha} F_0(r)$, то $L = m$.

Пример. Пусть

$$\begin{aligned} F(x, y, 0) &= e^{-x^2-y^2} (2c_0 + c_1 H_1(\sqrt{2} x)) (2d_0 + d_1 H_1(\sqrt{2} y)) = \\ &= 4c_0 d_0 \mathcal{H}_{0,0} + 2c_1 d_0 \mathcal{H}_{1,0} + 2c_0 d_1 \mathcal{H}_{0,1} + c_1 d_1 \mathcal{H}_{1,1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$L = \frac{16 \operatorname{Im}(c_0 d_1 \overline{c_1 d_0})}{4|c_0 d_0|^2 + 4|c_1 d_0|^2 + 4|c_0 d_1|^2 + 4|c_1 d_1|^2}.$$

В частности, при $c_1 = d_0 = d_1 = 1$, $c_0 = i$ получаем

$$F(x, y, 0) = 4e^{-x^2-y^2} (\sqrt{2} x + i)(\sqrt{2} y + 1),$$

т. е. пучок вида $f(x)g(y)$ с единичным полным угловым моментом.

Разложение (4.37) позволяет доказать третье свойство ротора:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \operatorname{rot}_0 \mathbf{j} \, dx \, dy &= -\frac{2}{k|\sigma|} \operatorname{Im} \sum_{\substack{n_1, m_1 \\ n_2, m_2}} e^{i(n_2+m_2-n_1-m_1) \arg \sigma} \times \\ &\times \left[\underbrace{c_{n_1, m_1} \bar{c}_{n_2+1, m_2} \pi 2^{n_1+m_2} (n_2+1) n_1! m_2!}_{n_1=n_2, m_2=m_1+1} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{c_{n_1, m_1+1} \bar{c}_{n_2, m_2} \pi 2^{n_1+m_2} (m_1+1) n_1! m_2!}_{n_1=n_2+1, m_2=m_1} \right] = \\ &= -\frac{4\pi}{k|\sigma|} \sum_{n,m=0}^{\infty} 2^{n+m} (n+1)! (m+1)! \operatorname{Im} [c_{n,m} \bar{c}_{n+1, m+1} + c_{n+1, m+1} \bar{c}_{n,m}] = 0. \end{aligned}$$

Это равенство является частным случаем более общего свойства, которое можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1 [50, 51]. Для любой функции $F(x, y, l)$, удовлетворяющей параболическому уравнению и убывающей к нулю при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, и любой плоскости l в зоне Френеля справедливо тождество

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x + iy) \left(\frac{\partial I}{\partial l}(x, y, l) + i \operatorname{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \right) dx dy = 0. \quad (4.38)$$

Здесь $f(z)$ — произвольная целая аналитическая функция, не нарушающая сходимости интеграла¹⁾. Выбор $f(z) \equiv 1$ дает уже известные законы сохранения энергии и вихревой компоненты вектора потока световой энергии.

Доказательство. Если $F(x, y, l)$ — решение параболического уравнения, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial l} &= F \frac{\partial \bar{F}}{\partial l} + \bar{F} \frac{\partial F}{\partial l} = F \left(\frac{\Delta \bar{F}}{2ik} \right) + \bar{F} \left(-\frac{\Delta F}{2ik} \right) = \\ &= \frac{F \Delta \bar{F} - \bar{F} \Delta F}{2ik} = \frac{2i}{k} \left(\bar{F} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} - F \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z \partial \bar{z}} \right); \\ i \operatorname{rot}_0 \mathbf{j} &= \frac{2i}{k} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{2i}{k} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Складывая оба равенства, получаем

$$\frac{\partial I}{\partial l}(x, y, l) + i \operatorname{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) = \frac{2i}{k} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{F} \frac{\partial F}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \right) \right],$$

т.е. левая часть является полной производной по \bar{z} . Поскольку $f(z)$ от \bar{z} не зависит, то однократное интегрирование по частям завершает доказательство. \square

Полученные в данном параграфе разнообразные формулы, связанные с интегральными инвариантами для общих решений $F(x, y, l)$ параболического уравнения, можно использовать для нахождения некоторых характеристик пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса. Например,

$$L[\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)] = (n - m) \sin 2\alpha, \quad L[\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)] = (n - m) \operatorname{Im} \frac{z}{\bar{z}}.$$

¹⁾ В частности, для пучков с гауссовым спадением на бесконечности в качестве функции $f(z)$ может быть выбран любой полином по z .

Более общие формулы:

$$\begin{aligned}
 L \left[e^{ia(x^2+y^2)+ib\psi(x,y,\beta)} \mathcal{G}_{n,m}(x \cos \gamma - y \sin \gamma, y \cos \gamma + x \sin \gamma \mid \alpha) \right] &= \\
 &= (n-m) \left[\sin 2\alpha + b \sin 2(\beta - \gamma) \cos 2\alpha \right], \\
 L \left[e^{ia(x^2+y^2)+ib\psi(x,y,\beta)} \mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{x-cy}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{y-cx}{\sqrt{1-c^2}} \mid \alpha \right) \right] &= \\
 &= (n-m) \left[\sin 2\alpha + \left(\frac{2c}{1-c^2} a + \frac{1+c^2}{1-c^2} b \sin 2\beta \right) \cos 2\alpha \right].
 \end{aligned}$$

В ряде работ (например, [46, 52]), связанных с нахождением вторых моментов обычных Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса пучков, рассматривался параметр M^2 :

$$M^2[f] = \frac{2}{E} \iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) |f(x, y)|^2 dx dy.$$

С помощью формул на стр. 65 легко получить, что данная характеристика для пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса не зависит от параметра z :

$$M^2[\mathcal{G}_{n,m}(x, y, z)] = n + m + 1.$$

Глава 5

СПИРАЛЬНЫЕ ПУЧКИ СВЕТА — НОВЫЙ КЛАСС АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной главе теоретически исследован вопрос существования решений параболического уравнения, сохраняющих при эволюции неизменной свою интенсивность на начальной плоскости с точностью до масштаба и вращения. Найденные решения были названы спиральными пучками света. При дополнительных ограничениях асимптотического плана на интенсивность задача поиска спиральных пучков решена полностью. Показано, что такие решения являются целыми функциями второго порядка роста от двух переменных и их класс достаточно широк для разнообразных применений в лазерных технологиях.

5.1. Постановка задачи о световых полях, вращающихся при распространении

В главе 2 были найдены новые связи между известными автомодельными решениями параболического уравнения — пучками Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Сами эти решения получаются из условия автомодельности интенсивности [4, 53] как сохранения интенсивности при изменении l с точностью до масштаба.

В данной главе проводится поиск и исследование новых автомодельных решений параболического уравнения, а именно, рассматривается следующий вопрос: существуют ли (и, если да, то какие) решения $F(x, y, l)$ параболического уравнения (1.24), интенсивность которых при изменении l сохраняет свою структуру с точностью до масштаба и вращения?

Условие структурной устойчивости при этом может быть определено следующим образом:

$$I(x, y, l) = D(l)I_0 \left(\frac{x \cos \theta(l) - y \sin \theta(l)}{d(l)}, \frac{x \sin \theta(l) + y \cos \theta(l)}{d(l)} \right), \quad (5.1)$$

где $\theta(l)$ — вращение интенсивности при распространении поля $F(x, y, l)$, $d(l) > 0$ — масштабное изменение интенсивности. Определим

вещественные переменные X, Y равенством

$$X + iY = \frac{x + iy}{d(l)} e^{i\theta(l)}. \quad (5.2)$$

Использование переменных (X, Y, l) вместо (x, y, l) позволяет записать условие структурной устойчивости интенсивности в наиболее компактном виде: функция $I_0(X, Y)$ не зависит от l . Применение закона сохранения энергии (1.38) позволяет выразить $D(l)$ через $d(l)$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y, l) dx dy = D(l) d^2(l) \iint_{\mathbb{R}^2} I_0(X, Y) dX dY = \text{const}.$$

Следовательно, $D(l) = 1/d^2(l)$.

Таким образом, задача поиска автомодельных решений $F(x, y, l)$, интенсивность которых при распространении может только вращаться или изменяться в масштабе, требует также нахождения функций $\theta(l)$, $d(l)$, характеризующих поведение $I(x, y, l)$ при изменении l .

Отправной точкой при решении поставленной задачи будет вещественная форма записи уравнения (1.24). В терминах интенсивности $I(x, y, l)$ и фазы $\phi(x, y, l)$ это уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(I \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + k \frac{\partial I}{\partial l} = 0, \\ 2I \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 - \\ - 4I^2 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + 2k \frac{\partial \phi}{\partial l} \right] = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Подставляя выражение для интенсивности (5.1) в первое уравнение этой системы, перепишем его в переменных X, Y, l :

$$\nabla \left(I_0 \nabla \left[\phi - \frac{1}{2} k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) \right] \right) + k \theta'(l) d^2(l) \left(X \frac{\partial I_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial I_0}{\partial X} \right) = 0,$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y} \right)$.

Если определить функцию $\phi_0(X, Y, l)$ равенством

$$\phi(x, y, l) = \frac{1}{2} k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + \phi_0(X, Y, l),$$

то структурно устойчивое световое поле $F(x, y, l)$ примет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} \sqrt{I_0(X, Y)} \exp \left(\frac{1}{2} i k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + i \phi_0(X, Y, l) \right), \quad (5.4)$$

а система (5.3) в переменных X, Y, l и функциях I_0, ϕ_0 будет следующей:

$$\begin{cases} \nabla(I_0 \nabla \phi_0) + kd^2(l)\theta'(l) \left(X \frac{\partial I_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial I_0}{\partial X} \right) = 0, \\ |\nabla \phi_0|^2 + k^2 d^3(l) d''(l) (X^2 + Y^2) + 2kd^2(l) \frac{\partial \phi_0}{\partial l} + \\ + 2kd^2(l)\theta'(l) \left(X \frac{\partial \phi_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial \phi_0}{\partial X} \right) - \frac{1}{2I_0} \left(\nabla^2 I_0 - \frac{|\nabla I_0|^2}{2I_0} \right) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Система уравнений (5.5) во многом аналогична системе (2.5) для невращающихся световых полей. Главная проблема здесь также состоит в том, что фаза ϕ_0 , вообще говоря, зависит от всех трех переменных X, Y, l . Однако применение к этой системе теорем комплексного анализа, рассмотренных в главе 2, позволяет получить структуру решений и для этого случая.

5.2. Структурный вид вращающихся световых полей

Все рассуждения о порядке роста решений полностью аналогичны приведенным в главе 2 для невращающихся световых полей. Различие лишь в виде полинома $P(X, Y, l)$. Поэтому мы опустим часть, касающуюся теорем о порядке роста, и начнем со следующего.

Из принципа максимума модуля аналитической функции следует, что $\phi_0(Z, W, l) = \phi_0(Z, W, 0) + P(Z, W, l) + \gamma(l)$, или в вещественном варианте

$$\phi_0(X, Y, l) = \phi_0(X, Y, 0) + P(X, Y, l) + \gamma(l), \quad (5.6)$$

где

$$P(X, Y, l) = a_1(l) \frac{X^2 + Y^2}{2} + a_2(l) \frac{X^2 - Y^2}{2} + a_3(l)XY + b_1(l)X + b_2(l)Y$$

— многочлен второй степени по переменным X, Y и $\gamma(l)$ — некоторая функция. Покажем, что $P(X, Y, l) \equiv 0$.

Подстановка $l = 0$ в (5.6) дает

$$a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = b_1(0) = b_2(0) = 0. \quad (5.7)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (5.5) по l , получим

$$\begin{aligned} & \left((a'_1 + a'_2)X + (a'_3 - k(\theta' d^2)')Y + b'_1 \right) \frac{\partial I_0}{\partial X} + \\ & + \left((a'_3 + k(\theta' d^2)')X + (a'_1 - a'_2)Y + b'_2 \right) \frac{\partial I_0}{\partial Y} + 2a'_1 I_0 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $I_0(X, Y)$ неотрицательна и ограничена сверху, то существует точка максимума (X_0, Y_0) , в которой

$$I_0(X_0, Y_0) > 0, \quad \nabla I_0(X_0, Y_0) = 0.$$

Тогда из вышеприведенного уравнения в частных производных следует, что $a'_1 = 0$ (следовательно, в силу (5.7), $a_1(l) = 0$) и

$$\begin{aligned} & \left(a'_2 X + (a'_3 - k(\theta' d^2)') Y + b'_1 \right) \frac{\partial I_0}{\partial X} + \\ & + \left((a'_3 + k(\theta' d^2)') X - a'_2 Y + b'_2 \right) \frac{\partial I_0}{\partial Y} + 2a'_1 I_0 = 0. \end{aligned}$$

Общее решение данного уравнения есть произвольная функция вида

$$I_0 \left(k(\theta' d^2)' \frac{X^2 + Y^2}{2} + a'_3 \frac{X^2 - Y^2}{2} - a'_2 XY + b'_2 X - b'_1 Y \right). \quad (5.8)$$

Но $I_0(X, Y)$ не зависит от l , поэтому $a'_2, a'_3, b'_1, b'_2, (\theta' d^2)'$ не зависят от l , а, следовательно, сами коэффициенты a_2, a_3, b_1, b_2 зависят от l линейным образом. Начальное условие (5.7) позволяет отразить этот факт, записав многочлен P в виде $P(X, Y, l) = P(X, Y, 1) \cdot l$. Таким образом, первое уравнение системы (5.5) раскрывает линейную зависимость многочлена $P(X, Y, l)$ от l .

Для дальнейшей конкретизации вида многочлена используем второе уравнение системы (5.5). Трижды продифференцировав данное уравнение по l , получим

$$k^2(d^3 d'')''' (X^2 + Y^2) + 2k(d^2)''' P(X, Y, 1) + 2k(\gamma' d^2)''' = 0.$$

Поскольку это тождество справедливо при всех X, Y , то

$$(d^3 d'')''' = (d^2)''' P(X, Y, 1) = (\gamma' d^2)''' = 0.$$

Если $P(X, Y, 1) \equiv 0$, то $P(X, Y, l) \equiv 0$, и равенство (2.10) доказано. В противном случае, $(d^3 d'')''' = (d^2)''' = 0$. Из $(d^2)''' = 0$ следует, что $d^2(l)$ — квадратичная от l функция: $d^2(l) = al^2 + 2bl + c$, где a, b, c — константы. Так как

$$d^3 d'' = \frac{1}{2} d^2 (d^2)'' - \frac{1}{4} [(d^2)']^2,$$

то $d^3 d'' = a(al^2 + 2bl + c) - (al + b)^2 = ac - b^2$, т. е. равенство $(d^3 d'')''' = 0$ выполняется автоматически. Более того, выполняется равенство $(d^3 d'')' = 0$. Теперь дважды дифференцируя второе уравнение системы (5.3) по l и используя тот факт, что $(d^3 d'')' = 0$, получим

$$|\nabla P|^2 + 2k(\theta' d^2)' \left(X \frac{\partial P}{\partial Y} - Y \frac{\partial P}{\partial X} \right) + k(d^2)'' P + k(\gamma' d^2)'' = 0.$$

Здесь $P = P(X, Y, 1)$, а $(\theta' d^2)', (d^2)'', (\gamma' d^2)''$ — константы. Левая часть данного уравнения представляет собой многочлен второй степени, коэффициенты которого обязаны быть равными нулю. Выпишем эти коэффициенты.

- Коэффициент при X^2 :

$$a_2^2(1) + a_3^2(1) + 2k(\theta'd^2)'a_3(1) + \frac{1}{2}k(d^2)''a_2(1) = 0.$$

- Коэффициент при Y^2 :

$$a_2^2(1) + a_3^2(1) - 2k(\theta'd^2)'a_3(1) - \frac{1}{2}k(d^2)''a_2(1) = 0.$$

Отсюда $a_2^2(1) + a_3^2(1) = 0$ и, следовательно, $a_2(l) = a_3(l) = 0$.

- Коэффициент при X :

$$2k(\theta'd^2)'b_2(1) + k(d^2)''b_1(1) = 0.$$

- Коэффициент при Y :

$$-2k(\theta'd^2)'b_2(1) + k(d^2)''b_1(1) = 0.$$

Отсюда

$$(b_1^2(1) + b_2^2(1))(4[(\theta'd^2)']^2 + [(d^2)']^2) = 0.$$

Если $b_1^2(1) + b_2^2(1) = 0$, то $b_1(l) = b_2(l) = 0$ и, следовательно, функция $P(X, Y, 1)$ тождественно равна нулю. Если же $(\theta'd^2)' = (d^2)'' = 0$, то согласно представлению (5.8) интенсивность $I_0(X, Y)$ есть функция от линейной комбинацией $b_2(1)X - b_1(1)Y$ и в силу ограничения (2.6) $I_0 \equiv 0$. Теорема доказана. \square

Таким образом, экспоненциальное убывание интенсивности на бесконечности (2.6) позволяет выявить структуру фазы $\phi_0(X, Y, l)$ и переписать представление (5.4) в виде

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} F_0(X, Y) \exp\left(\frac{1}{2}ikd(l)d'(l)(X^2 + Y^2) + i\gamma(l)\right), \quad (5.9)$$

где $F_0(X, Y) = \sqrt{I_0(X, Y)} \exp(i\phi_0(X, Y, 0))$ допускает аналитическое продолжение до целой функции второго порядка роста. Тем самым структурная устойчивость интенсивности (5.1) порождает структурную устойчивость фазы.

5.3. Основные уравнения и параметры решений

В данном параграфе будут найдены функции, характеризующие пространство автомодельных решений параболического уравнения, — функции масштабирования $d(l)$, вращения $\theta(l)$ и фазового набег $\gamma(l)$, а также намечен путь для нахождения функции $F_0(X, Y)$, которая играет определяющую роль в представлении (5.9).

Использование равенства (2.10) в уравнениях (5.5) позволяет найти зависимости d , θ , γ от l . Аналогично рассмотрению в главе 2 легко показать, что эти три функции удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d^3(l)d''(l) = \text{const}, \quad d^2(l)\theta'(l) = \text{const}, \quad d^2(l)\gamma'(l) = \text{const}. \quad (5.10)$$

Если константа в первом уравнении равна нулю, то $d(l)$ есть линейная функция от l . В силу условия $d(l) > 0$ получаем $d(l) = d_0 = \text{const} > 0$. Следствием такого «постоянства масштаба» интенсивности при распространении светового поля $F(x, y, l)$ является его бесконечная энергия¹⁾, т. е. $F(x, y, l) \notin L_2(\mathbb{R}^2)$ для всех l . Несмотря на то, что параболическое уравнение допускает подобные формальные решения, например,

$$F(x, y, l) = J_m(r\sqrt{2k\gamma_0}) \exp(im\alpha - i\gamma_0 l), \quad \theta(l) \equiv 0, \quad x + iy = re^{i\alpha},$$

они не будут рассматриваться далее.

Если константа в первом уравнении системы (5.10) отлична от нуля, то общее решение системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} d(l) &= d_0 \sqrt{1 + \frac{4(l - l_0)^2}{k^2 \rho^4}}, \\ \theta(l) &= \theta_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{2(l - l_0)}{k\rho^2}\right) + \theta_1, \\ \gamma(l) &= -\gamma_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{2(l - l_0)}{k\rho^2}\right) + \gamma_1, \end{aligned}$$

где $d_0, \theta_0, \theta_1, \gamma_0, \gamma_1, l_0, \rho$ — произвольные константы. Не изменяя общности, можно считать, что $d_0 = 1, l_0 = \theta_1 = \gamma_1 = 0$. Тогда представление (5.9) примет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} F_0(X, Y) \exp\left(\frac{2il}{k\rho^2}(X^2 + Y^2) - i\gamma_0 \arg \sigma\right), \quad (5.11)$$

где $X + iY = \frac{x + iy}{\rho|\sigma|} \exp(i\theta_0 \arg \sigma)$ и $\sigma = 1 + \frac{2il}{k\rho^2}$ — комплексный параметр, введенный для более компактной формы записи.

¹⁾ Если $d(l) = d_0$, то из двух других уравнений системы (5.10) находим $\theta(l) = \theta_0 l + \theta_1$, $\gamma(l) = \gamma_0 l + \gamma_1$, где $\theta_0, \theta_1, \gamma_0, \gamma_1$ — некоторые константы. Не изменяя общности, можно считать, что $d_0 = 1, \theta_1 = \gamma_1 = 0$. Тогда представление (5.9) примет вид $F(x, y, l) = F_0(X, Y) \exp(-i\gamma_0 l)$, где $X + iY = (x + iy) \exp(i\theta_0 l)$. Если подобное поле обладает конечной энергией, то

$$F_0(X, Y) \exp(-i\gamma_0 l) = \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

В силу условия (2.6) выполнение данного равенства при всех $l > 0$ возможно только для $F_0(X, Y) \equiv 0$, поскольку $|F_0(X, Y)| \leq \frac{c}{l}$ для любого сколь угодно большого l .

Подставляя (5.11) в параболическое уравнение, получим уравнение для функции $F_0(X, Y)$:

$$\nabla^2 F_0 + 4i\theta_0 \left(X \frac{\partial F_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial F_0}{\partial X} \right) - 4F_0(X^2 + Y^2 - \gamma_0) = 0. \quad (5.12)$$

При $\theta_0 = 0$ данное уравнение является параболическим уравнением для гармонического осциллятора, его решения хорошо известны [16, 54, 55] и были рассмотрены в главе 2. Это функции Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{n,m}(X, Y)$, $\gamma_0 = n + m + 1$ при $n, m = 0, 1, \dots$ и Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{n,m}(X, Y)$, $\gamma_0 = 2n + |m| + 1$ при $n, \pm m = 0, 1, \dots$. Поиск решений уравнения (5.12) можно рассматривать как задачу нахождения собственных функций оператора

$$H \equiv \nabla^2 + 4i\theta_0 \left(X \frac{\partial}{\partial Y} - Y \frac{\partial}{\partial X} \right) - 4(X^2 + Y^2), \quad (5.13)$$

соответствующих собственным значениям $-4\gamma_0$. Как будет следовать из дальнейшего изложения, для любого вещественного θ_0 данный оператор имеет непустой, чисто точечный спектр.

Будем искать решения уравнения (5.12) в виде разложения

$$F_0(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y), \quad (5.14)$$

которое всегда возможно благодаря неравенству (2.6) и полноте системы функций $\{\mathcal{L}_{n,m}(X, Y), n, \pm m = 0, 1, \dots\}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Подставляя (5.14) в уравнение (5.12), получим тождество

$$\sum_{n,m} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y) (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0,$$

или, в силу полноты системы функций Лагерра–Гаусса, бесконечный набор условий на коэффициенты c_{nm} и числа n, m :

$$c_{nm} (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0.$$

Если зафиксировать некоторую пару (n_0, m_0) , то проблема поиска $F_0(X, Y)$ сводится к определению целых чисел n, m из уравнения

$$2n + |m| + \theta_0 m = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0. \quad (5.15)$$

В данной формуле n, n_0 — неотрицательные целые числа, m, m_0 — целые числа, θ_0 — вещественное число. При этом $\gamma_0 = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1$. Коэффициенты c_{nm} выбираются произвольным образом для тех пар (n, m) , которые удовлетворяют уравнению (5.15), в противном случае они обязаны быть равны нулю.

5.4. Спиральные пучки и их квантово-механические аналоги

Обозначим через $\mathcal{N}(\theta_0)$ множество всех пар (n, m) , удовлетворяющих уравнению (5.15). Полное описание множества $\mathcal{N}(\theta_0)$ при различных θ_0 и определение функций $F_0(X, Y)$ сводится к следующим пяти случаям.

1. Если θ_0 — иррациональное число, то множество $\mathcal{N}(\theta_0)$ состоит из единственной пары (n_0, m_0) . Используя определение функций Лагерра–Гаусса, легко показать, что структурно устойчивое поле $F(x, y, l)$ не имеет зависимости от θ_0 и представимо в виде

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n_0 + |m_0| + 1) \arg \sigma\right) \times \\ \times \mathcal{L}_{n_0, m_0}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right). \quad (5.16)$$

Отсутствие зависимости от θ_0 есть, конечно же, обратная сторона радиально-симметричной формы интенсивности поля (5.16), поскольку в данном случае все равно, какое вращение ему приписывать.

2. Если $\theta_0 = 0$, то $\theta(l) \equiv 0$, и соответствующее поле $F(x, y, l)$ распространяется вдоль l без вращения. При этом

$$\mathcal{N}(0) = \{(n, m); 2n + |m| = N\}, \quad \text{где } N = 0, 1, \dots,$$

$\gamma_0 = N + 1$ и

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(N + 1) \arg \sigma\right) \times \\ \times \sum_{n=0}^N c_n \mathcal{L}_{\min(n, N-n), N-2n}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right), \quad (5.17)$$

где c_n — произвольные константы. Полученное выражение показывает, что без вращения в параксиальном приближении могут распространяться, сохраняя свою структуру, только поля, которые в перетяжке имеют вид произведения гауссовой функции на некоторый полином специального вида ¹⁾. Более того,

$$|F(x, y, l)| = |F(-x, -y, l)|,$$

т. е. интенсивность любого невращающегося структурно устойчивого поля обладает центральной симметрией. На рис. 5.1 показаны примеры таких полей. Мода Эрмита–Гаусса, изображенная на рис. 5.1, а,

¹⁾ Отметим также, что с помощью (3.13) и (4.1) поле (5.17) может быть записано в виде разложения по функциям Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{n, N-n}$ или функциям Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathcal{G}_{n, N-n}$.

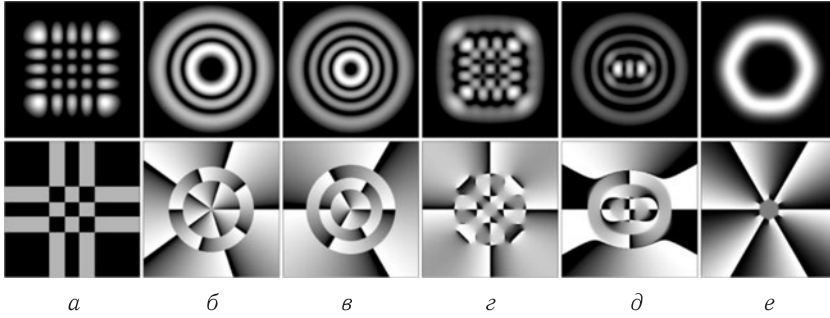


Рис. 5.1. Интенсивности (верхний ряд) и фазы (нижний ряд) структурно устойчивых полей без вращения: (а) — мода Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{4,4}(x, y)$; (б), (в) — моды Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{2,5}(x, y)$ и $\mathcal{L}_{3,-3}(x, y)$; (г), (д) — моды Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathcal{G}_{4,4}(x, y | \pi/10)$ и $\mathcal{G}_{5,3}(x, y | \pi/5)$; (е) — поле (5.17) при $N = 8$ со специальным подбором коэффициентов c_n , чтобы его интенсивность выглядела как правильный шестиугольник

является вещественной функцией, поэтому ее фаза принимает только значения 0 и π . Горизонтальные и вертикальные прямые на фазовом распределении моды Эрмита–Гаусса показывают местоположение нулевых линий: при пересечении такой линии происходит скачок фазы на π . Моды Лагерра–Гаусса имеют и нулевые линии — окружности, и изолированный нуль в центре координат.

Изолированные нули (точки фазовой сингулярности) удобно классифицировать по величине набега, который приобретает фаза при обходе вокруг такого нуля против часовой стрелки. Если набег фазы положителен, то будем называть такой нуль «нулем типа z », если отрицателен — «нулем типа \bar{z} ». Несмотря на то что такая классификация не отражает всего многообразия возможностей (нулевые линии вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды могут пересекаться и не под прямым углом, и быть весьма далеки по виду от линейных функций даже в малой окрестности нуля), она позволяет дать простейшую характеристику поведения фазы в окрестности каждого изолированного нуля.

Для моды $\mathcal{L}_{2,5}(x, y)$ точка фазовой сингулярности — это нуль типа z пятого порядка: при обходе вокруг него против часовой стрелки фаза меняется от 0 до 2π пять раз. Для моды $\mathcal{L}_{3,-3}(x, y)$ аналогичная точка в центре координат — изолированный нуль типа \bar{z} третьего порядка. Структурно устойчивые поля, показанные на рис. 5.1 г, д, е, обладают изолированными нулями и типа z , и типа \bar{z} .

3. Пусть $\theta_0 = -1$. Тогда $2n + |m| - m$ есть четное неотрицательное число. Обозначая его через $2N$, находим множество

$$\mathcal{N}(-1) = \{(N, m); m \geq 0\} \cup \{(N + m, m); m = -1, -2, \dots, -N\},$$

параметр фазового набег $\gamma_0 = 2N + 1$, и световое поле

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2N + 1) \arg \sigma\right) \times \\ \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathcal{L}_{N,m}(X, Y) + \sum_{m=1}^N c_{-m} \mathcal{L}_{N-m, -m}(X, Y) \right), \quad (5.18)$$

где $X + iY = \frac{x+iy}{\rho\sigma}$. При $N=0$ простой вид функций Лагерра–Гаусса

$$\mathcal{L}_{0,m}(X, Y) = e^{-X^2 - Y^2} (X + iY)^m$$

позволяет представить решение в более компактной форме:

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-X^2 - Y^2} (X + iY)^m = \\ = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma}\right) f\left(\frac{x + iy}{\rho\sigma}\right), \quad (5.19)$$

где $f(z)$ — любая целая аналитическая функция, не нарушающая условие $F(x, y, 0) \in L_2(\mathbb{R}^2)$. В силу формулы $\theta(l) = -\arctg \frac{2l}{k\rho^2}$, эволюция интенсивности поля $F(x, y, l)$ при распространении выглядит как замедляющееся вращение — максимальное в области перетяжки и практически нулевое в дальней зоне. При этом полный угол поворота поля при распространении составляет $\theta(\infty) - \theta(0) = -\frac{\pi}{2}$.

Общему выражению (5.18) также можно придать более наглядную форму, если воспользоваться дифференциальным представлением функций Лагерра–Гаусса из [20]:

$$\mathcal{L}_{n,\pm m}(X, Y) = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m}n!} e^{X^2 + Y^2} \frac{\partial^n}{\partial(X \pm iY)^n} \frac{\partial^{n+m}}{\partial(X \mp iY)^{n+m}} e^{-2X^2 - 2Y^2}.$$

Окончательный ответ будет следующим:

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2N + 1) \arg \sigma\right) \times \\ \times e^{Z\bar{Z}} \frac{\partial^N}{\partial Z^N} \left(e^{-2Z\bar{Z}} f(Z) \right) = \\ = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} - 2iN \arg \sigma\right) \left(\frac{\partial}{\partial Z} - 2\bar{Z} \right)^N f(Z), \quad (5.20)$$

где $Z = \frac{x + iy}{\rho\sigma}$ и $\bar{Z} = \frac{x - iy}{\rho\bar{\sigma}}$.

4. Случай $\theta_0 = 1$ полностью аналогичен предыдущему. Полагая $2n + |m| + m = 2N$, находим

$$\mathcal{N}(1) = \{(N, m); m \leq 0\} \cup \{(N - m, m); m = 1, 2, \dots, N\},$$

$$\gamma_0 = 2N + 1 \text{ и}$$

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma} - i(2N + 1) \arg \sigma\right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} - 2Z\right)^N f(\bar{Z}), \quad (5.21)$$

где $Z = \frac{x + iy}{\rho \sigma}$, $\bar{Z} = \frac{x - iy}{\rho \bar{\sigma}}$. В частности, при $N = 0$ получаем

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma}\right) f\left(\frac{x - iy}{\rho \sigma}\right), \quad (5.22)$$

где, как и в (5.19), $f(z)$ — произвольная целая функция, не нарушающая квадратичной интегрируемости функции $F(x, y, 0)$. Это условие выполняется, например, для любой целой функции $f(z)$ с порядком роста $\rho_f < 2$. В частности, в качестве $f(z)$ можно выбрать некоторый полином. Структурно устойчивые поля такого рода одновременно и независимо были получены в [5, 56].

5. И наконец, если θ_0 является рациональным числом, отличным от 0 и ± 1 , то множество $\mathcal{N}(\theta_0)$ наряду с парой (n_0, m_0) содержит некоторую пару $(n_1, m_1 \neq m_0)$. В этом случае

$$\theta_0 = \frac{2n_0 + |m_0| - 2n_1 - |m_1|}{m_1 - m_0},$$

и структурно устойчивое решение имеет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1) \arg \sigma\right) \times \\ \times \sum_{(n, m) \in \mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n, m}(X, Y). \quad (5.23)$$

Представим θ_0 в виде несократимой дроби $\frac{P}{Q}$, где $Q > 0$ и P, Q — взаимно просты (т. е. $\text{НОД}(P, Q) = 1$). Тогда поиск множества $\mathcal{N}(\theta_0)$ приводит к уравнению в целых числах

$$2Qn + (P + Q \operatorname{sgn} m)m = 2Qn_0 + (P + Q \operatorname{sgn} m_0)m_0. \quad (5.24)$$

Здесь и далее будем считать, что $\operatorname{sgn} m = 1$ при $m \geq 0$ и $\operatorname{sgn} m = -1$ при $m < 0$. Применим для решения уравнения (5.24) следующее утвержде-

ние [57]: если P, Q, n_0, m_0 — целые числа и $\text{НОД}(P, Q) = 1$, то общее решение диофантова уравнения $P(n - n_0) + Q(m - m_0) = 0$ имеет вид $\{n = n_0 + Qk, m = m_0 - Pk, k \in \mathbb{Z}\}$.

Поскольку $\text{НОД}(P, Q) = 1$, то при решении уравнения (5.24) возможны два случая:

- 1) $\text{НОД}(P \pm Q, 2Q) = 1$, т.е. одно из чисел P, Q является четным.
- 2) $\text{НОД}(P \pm Q, 2Q) = 2$, т.е. оба числа P, Q нечетны.

В случае 1) коэффициенты перед n, m в уравнении (5.24) взаимно просты. Если $\text{sgn } m = \text{sgn } m_0$, то уравнение можно переписать в виде

$$2Q(n - n_0) + (P + Q \text{sgn } m_0)(m - m_0) = 0.$$

Согласно вышеприведенному утверждению, его решение есть

$$\begin{aligned} \{n = n_0 + (P + Q \text{sgn } m_0)k, m = m_0 - 2Qk; k \in \mathbb{Z}, \\ n_0 + (P + Q \text{sgn } m_0)k \geq 0, |m_0| - 2Qk \text{sgn } m_0 \geq 0\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Последние два неравенства, ограничивающие произвол k , получаются из определения множества $\mathcal{N}(\theta_0)$ и предположения $\text{sgn } m = \text{sgn } m_0$ соответственно. Если $\text{sgn } m = -\text{sgn } m_0$, то уравнение (5.24) можно переписать как

$$2Q(n - n_0 - |m_0|) + (P - Q \text{sgn } m_0)(m - m_0) = 0,$$

и его решение имеет вид

$$\begin{aligned} \{n = n_0 + |m_0| + (P - Q \text{sgn } m_0)k, m = m_0 - 2Qk; k \in \mathbb{Z}, \\ n_0 + |m_0| + (P - Q \text{sgn } m_0)k \geq 0, |m_0| - 2Qk \text{sgn } m_0 < 0\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Таким образом, если одно из чисел P, Q четно, то множество $\mathcal{N}(\theta_0)$ является объединением множеств (5.25) и (5.26). В случае 2, разделив уравнение (5.24) на 2, получаем уравнение

$$Qn + \frac{1}{2}(P + Q \text{sgn } m)m = Qn_0 + \frac{1}{2}(P + Q \text{sgn } m_0)m_0,$$

в котором коэффициенты перед n, m взаимно просты. Решая его аналогичным образом, запишем конечный результат: при $\text{sgn } m = \text{sgn } m_0$

$$\begin{aligned} \{n = n_0 + \frac{1}{2}(P + Q \text{sgn } m_0)k, m = m_0 - Qk; k \in \mathbb{Z}, \\ n_0 + \frac{1}{2}(P + Q \text{sgn } m_0)k \geq 0, |m_0| - Qk \text{sgn } m_0 \geq 0\}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

при $\text{sgn } m = -\text{sgn } m_0$

$$\begin{aligned} \{n = n_0 + |m_0| + \frac{1}{2}(P - Q \text{sgn } m_0)k, m = m_0 - Qk; k \in \mathbb{Z}, \\ n_0 + |m_0| + \frac{1}{2}(P - Q \text{sgn } m_0)k \geq 0, |m_0| - Qk \text{sgn } m_0 < 0\}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Объединение множеств (5.27) и (5.28) составляет множество $\mathcal{N}(\theta_0)$, если оба числа P, Q нечетны.

Проиллюстрируем использование полученных формул на двух примерах.

Пусть $\theta_0 = -0,4 = -\frac{2}{5}$. Тогда $P = -2$, $Q = 5$, и построение множества $\mathcal{N}(\theta_0)$ производится по варианту $(5.25) \cup (5.26)$. Если выбрать начальную пару (n_0, m_0) таким образом, что $m_0 > 0$, то

$$\mathcal{N}\left(-\frac{2}{5}\right) = \left\{(n_0 + 3k, m_0 - 10k), k \in \mathbb{Z}, -\frac{n_0}{3} \leq k \leq \frac{m_0}{10}\right\} \cup \\ \cup \left\{(n_0 + m_0 - 7k, m_0 - 10k), k \in \mathbb{Z}, \frac{m_0}{10} < k \leq \frac{n_0 + m_0}{7}\right\}.$$

В частности, при $n_0 = 0$, $m_0 = 9$ получаем $\mathcal{N}(-\frac{2}{5}) = \{(0, 9), (2, -1)\}$ и

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma} - 6,4i \arg \sigma\right) \times \\ \times \left[c_1 \left(\frac{x + iy}{\rho|\sigma|} e^{-0,4i \arg \sigma} \right)^9 + c_2 \frac{x - iy}{\rho|\sigma|} e^{0,4i \arg \sigma} L_2^1\left(\frac{2x^2 + 2y^2}{\rho^2 |\sigma|^2}\right) \right], \quad (5.29)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные константы. Спиральный пучок, соответствующий значениям $c_1 = 1$ и $c_2 = -49i$, показан на рис. 5.2. При распространении из области перетяжки в дальнюю зону пучок (5.29) поворачивается на угол

$$\theta(\infty) - \theta(0) = \frac{\pi \theta_0}{2} = -\frac{2\pi}{10}.$$

Интенсивность не меняется от такого поворота, поэтому данный спиральный пучок представляет собой пример поля, инвариантного к двумерному преобразованию Фурье.

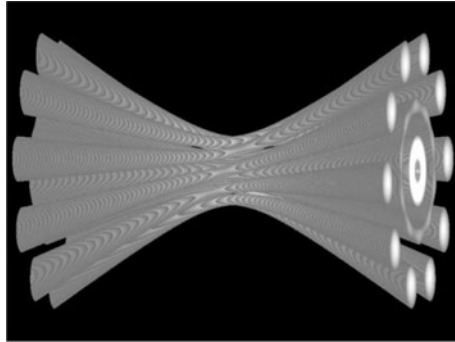


Рис. 5.2. Фрагмент пространственного распространения спирального пучка (5.29) по l в области перетяжки

Один из простейших примеров экспериментальной реализации спиральных пучков света основан на интегральном преобразовании (3.4). Дело в том, что в лазере обычно реализуются моды Эрмита–Гаусса или их линейные комбинации. Не вдаваясь в подробности, отметим, что это связано с малыми амплитудно-фазовыми возмущениями при генерации пучка, порождаемыми несферичностью формы зеркал в резонаторе лазера, их несоосностью и т.д. В математическом плане, лазер «предпочитает» реализовывать моды Эрмита–Гаусса, поскольку они, в отличие от мод Лагерра–Гаусса, инвариантны к интегральному преобразованию (2.27).

В результате (3.4) поле $c_1 \mathcal{H}_{n_1, m_1}(x, y) + c_2 \mathcal{H}_{n_2, m_2}(x, y)$ трансформируется в сумму двух мод Лагерра–Гаусса с общим чисто фазовым множителем $\exp(-\frac{1}{4}ixy)$. На практике от него можно избавиться с помощью пары цилиндрических линз и результирующее поле будет спиральным пучком. В соответствии с (3.4) его параметр вращения равен

$$\theta_0 = \frac{n_1 + m_1 - n_2 - m_2}{n_2 + m_1 - n_1 - m_2}.$$

Отметим также, что случай $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$, приводящий к $\theta_0 = \infty$, означает, что результат трансформации суммы мод Эрмита–Гаусса не имеет структурно-устойчивой интенсивности и, следовательно, не является спиральным пучком.

На рис. 5.3, 5.4 приведены фотографии экспериментальных распределений интенсивности и результаты соответствующего численного моделирования.

Пусть теперь $\theta_0 = -3$. Тогда $P = -3$, $Q = 1$, и для построения множества $\mathcal{N}(\theta_0)$ используется вариант (5.27) \cup (5.28). Если выбрать начальную пару $n_0 = m_0 = 0$, то получается множество

$$\mathcal{N}(-3) = \{(k, k), k \geq 0\}$$

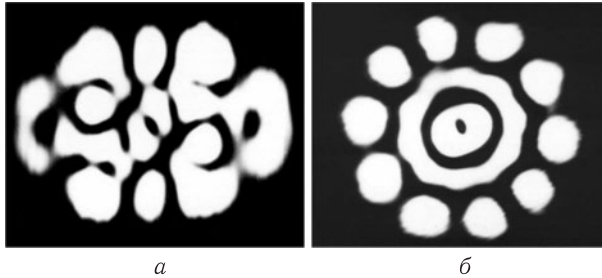


Рис. 5.3. Экспериментальные распределения интенсивности пучка, выходящего из гелий-неонового лазера (а) и пучка, полученного из него в результате трансформации некоторой системой линз, которая эквивалентна интегральному преобразованию (3.4) (б)

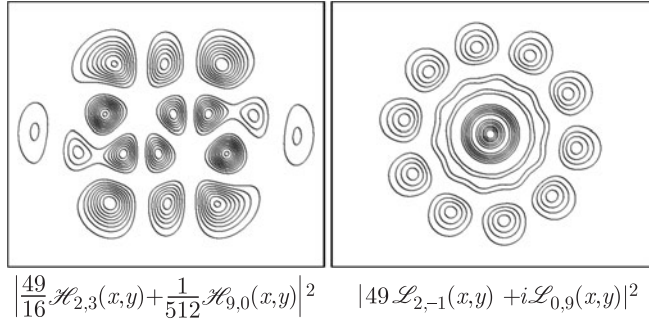


Рис. 5.4. Линии уровня двух теоретических распределений интенсивности и спиральный пучок

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{x + iy}{\rho|\sigma|} e^{-3i \arg \sigma}\right)^k L_k^k\left(\frac{2x^2 + 2y^2}{\rho^2 |\sigma|^2}\right).$$

В данном случае, в отличие от предыдущего, имеется бесконечное число степеней свободы, т.е. констант c_k , для построения поля F . Соответственно, число сингулярностей фазы у такого пучка может быть не только конечным, но и бесконечным. Одним из примеров подобного рода является спиральный пучок, построенный на основе модифицированной функции Бесселя и имеющий в плоскости перетяжки следующий вид:

$$F(x, y, 0) = e^{-z\bar{z} + az} \frac{I_\nu(2z\sqrt{a^2 - 2a\bar{z}})}{(2z\sqrt{a^2 - 2a\bar{z}})^\nu}.$$

Здесь a и ν — произвольные параметры, $z = \frac{x + iy}{\rho}$ и $\bar{z} = \frac{x - iy}{\rho}$ — комплексные переменные. На рис. 5.5 показан пучок

$$F(x, y, 0) + F(y, -x, 0) + F(-x, -y, 0) + F(-y, x, 0)$$

при $a = 1,3$ и $\nu = 1$.

Таким образом, множество $\mathcal{N}(\theta_0)$ найдено для всех $\theta_0 \in \mathbb{R}$: при иррациональных θ_0 оно состоит из одной пары (n, m) , при рациональных θ_0 содержит либо конечное, либо счетное число таких пар. Тем самым полностью завершено описание структурно устойчивых решений¹⁾ параболического уравнения, удовлетворяющих структурному представлению (5.1) и неравенству (2.6). Вращение и увеличение

¹⁾ Можно еще рассмотреть вопрос о возможности представления спиральных пучков не в виде разложения в ряд по модам Лагерра-Гаусса, а в более компактной форме, подобно тому, как для случая $\theta_0 = \pm 1$ были найдены

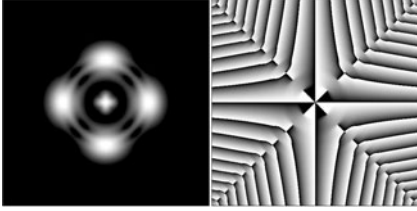


Рис. 5.5. Интенсивность и фаза спирального пучка, соответствующего параметру вращения $\theta_0 = -3$

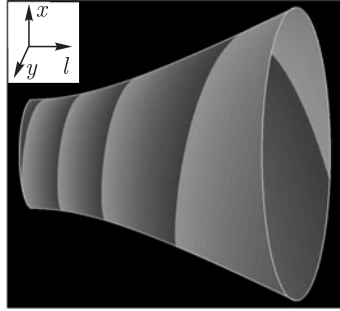


Рис. 5.6. Траектория движения точки (x_0, y_0) при распространении спирального пучка $F(x, y, l)$ с $\theta_0 = -15$

в масштабе таких световых полей при распространении вдоль оси l задается равенствами

$$\theta(l) = \theta_0 \operatorname{arctg} \frac{2l}{k\rho^2}, \quad d(l) = \sqrt{1 + \frac{4l^2}{k^2\rho^4}}.$$

Если в исходной плоскости $l=0$ зафиксировать некоторую точку (x_0, y_0) , то ее путь при распространении поля $F(x, y, l)$ опишет некоторую спираль $x + iy = (x_0 + iy_0)|\sigma|e^{-i\theta_0 \arg \sigma}$. При малых $|\theta_0|$ название «спираль» довольно условно и указывает лишь на некоторую тенденцию к повороту, но при больших $|\theta_0|$ точка (x_0, y_0) при распространении поля F совершает $\frac{1}{4}|\theta_0|$ оборотов вокруг оси l по часовой или против часовой стрелки в зависимости от знака θ_0 (см. рис. 5.6). Завершается такое неравномерное вращение асимптотическим приближением к пря-

формулы (5.19) и (5.22). Такие представления действительно существуют, но они достаточно громоздки. Например, для $\theta_0 = -3$ в простейшем варианте

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2}\right) e^{X^2 + Y^2} \times \\ \times \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\sqrt{2}(X\xi + Y\eta) - \xi^2 - \eta^2} f((\xi + i\eta)^2(\xi - i\eta)) d\xi d\eta,$$

где $X + iY = \frac{x + iy}{\rho|\sigma|} e^{-3i \arg \sigma}$ и $f(z)$ — произвольная целая функция, не нарушающая квадратичной интегрируемости функции $F(x, y, 0)$. Построение $F(x, y, l)$ в общем случае добавляет данной задаче некоторый теоретико-числовой аспект: если при описании спиральных пучков с параметром вращения $\theta_0 = \pm 1$ возникает лишь один дифференциальный оператор, то для случая $\theta_0 = -3$ их три, а для случая $\theta_0 = -2$ таких операторов семь.

мой

$$x + iy = (x_0 + iy_0) \left(1 + \frac{2il}{k\rho^2} \right) \exp \left(-\frac{\pi i(\theta_0 + 1)}{2} \right). \quad (5.30)$$

Отметим также, что линии постоянной фазы найденных решений вне перетяжки имеют спиралевидную форму. Эти два обстоятельства позволили предложить название «спиральные пучки света» для найденных световых полей [5, 50, 51, 58–61].

Связь между параксиальной оптикой и квантовой механикой рассматривалась различными авторами (см., например, [54, 62]). Какая конкретная квантово-механическая ситуация соответствует спиральным пучкам? Уравнение для спиральных пучков (5.12) можно представить через нормированные полярные координаты:

$$\nabla^2 F + 4i\theta_0 \frac{\partial F}{\partial \alpha} - 4F(R^2 - \gamma_0) = 0.$$

Здесь R и α определяются из соотношения $Re^{i\alpha} = \frac{x + iy}{\rho|\sigma|} \exp(i\theta_0 \arg \sigma)$.

С другой стороны, в обычных полярных координатах R , α параболическое уравнение для волновой функции ψ заряженной частицы массы M и заряда e в однородном магнитном поле напряженности H имеет вид [10, 63]:

$$\nabla^2 \psi + 4i \operatorname{sgn}(eH) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - 4\psi \left(R^2 - \frac{2cME_1}{\hbar|eH|} \right) = 0,$$

где $E_1 = E - p_z^2/2M$, E — энергия частицы, p_z — значение импульса частицы вдоль направления поля. Видна эквивалентность этих уравнений при $\theta_0 = \operatorname{sgn}(eH)$, $\gamma_0 = 2cME_1/\hbar|eH|$. Таким образом, при $\theta_0 = \pm 1$, $\gamma_0 = 1$ спиральным пучкам соответствуют волновые функции частицы в постоянном магнитном поле с основным состоянием $E_1 = \hbar|eH|/2cM$. Необходимо отметить, что вид приведенных выше дифференциальных уравнений совпадает в различных системах координат. При описании движения заряженной частицы в однородном магнитном поле числа $\frac{1}{2}\gamma_0 = N + \frac{1}{2}$ называются уровнями Ландау, а оператор (5.13) допускает представление в виде суммы квадратов,

$$H = \left(\frac{\partial}{\partial X} + 2iY \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial Y} - 2iX \right)^2,$$

и называется квантово-механическим гамильтонианом с векторным потенциалом в симметричной калибровке. Исследование свойств оператора H с помощью групповых методов приводится в [64]. Там же, в частности, указано, что собственное подпространство оператора H , соответствующее нулевому уровню Ландау, совпадает с множеством функций вида $\exp(-|z|^2)f(z)$, т.е. получен аналог равенства (5.19) для совершенно другой физической ситуации.

5.5. Экспериментальная реализация спиральных пучков

Метод астигматического преобразования. Известно [38], что в устойчивом двухзеркальном резонаторе частоты генерации определяются выражением

$$\omega_q = \frac{2c}{L_0} (\gamma \arccos \sqrt{g_1 g_2} + \pi q), \quad (5.31)$$

где c — скорость света, L_0 — длина полного обхода резонатора, $g_{1,2} = (1 - L_0/2R_{1,2})$ — конфигурационные параметры, $R_{1,2}$ — радиусы кривизны зеркал, q — аксиальный индекс и параметр γ равен $\gamma = n + m + 1$ для мод Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{n,m}(x, y)$ и $\gamma = 2n + |m| + 1$ для мод Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{n,m}(x, y)$. Легко видеть, что моды, для которых $\gamma = \text{const}$, являются вырожденными по частоте. Если резонатор таков, что $\arccos \sqrt{g_1 g_2} = \pi M/N$, где M и N — взаимно простые числа, то условие вырождения по частоте оказывается справедливым также и для мод, удовлетворяющих условию

$$\gamma M + qN = \text{const}. \quad (5.32)$$

В связи с этим у суммы таких мод отсутствуют биения, и она также является стационарным, не зависящим от времени в каждом своем сечении распределением. Однако, как легко видеть, параметры γ слагаемых суммы различны, поэтому распределение интенсивности такой суперпозиции будет меняться при распространении. Пусть, например, генерируемое поле есть сумма таких мод Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{n_1, m_1}(x, y)$ и $\mathcal{L}_{n_2, m_2}(x, y)$, что $\gamma_1 \neq \gamma_2$, и выполняется условие (5.32). Тогда легко видеть из (5.23), что эта сумма представляет собой спиральный пучок с параметром вращения $\theta_0 = (\gamma_1 - \gamma_2)/(m_2 - m_1)$. Однако в реальных резонаторах из-за наличия анизотропии (например, астигматизма окон Брюстера), если не принимаются специальные меры, обычно генерируются моды Эрмита–Гаусса, поэтому непосредственное получение спирального пучка довольно затруднительно. Выправить ситуацию можно, если воспользоваться астигматическим преобразованием (3.4). Его можно реализовать различными способами посредством цилиндрической и сферической оптики. Примеры оптических схем и результаты экспериментов по конкретным реализациям астигматического преобразования приведены в главе 3.

Пусть пучок, генерируемый лазером, представляет собой сумму двух мод Эрмита–Гаусса с индексами (n_1, m_1) , (n_2, m_2) и $n_1 + m_1 \neq n_2 + m_2$. Посредством астигматического преобразования его можно трансформировать в сумму двух мод Лагерра–Гаусса с индексами $(\min(n_j, m_j), n_j - m_j)$, $j = 1, 2$. И, таким образом, в результате будет получен уже спиральный пучок с параметром вращения $\theta_0 = (n_1 + m_1 - n_2 - m_2)/(n_2 + m_1 - n_1 - m_2)$.

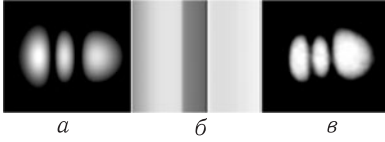


Рис. 5.7. Интенсивность (а) и фаза (б) кодировочного поля $\exp(-\frac{1}{8}\rho^2 x^2)h(y|\Delta_2)$ и экспериментальное распределение интенсивности (в) пучка, выходящего из гелий-неонового лазера. Определение кодировочного поля будет дано в главе 6

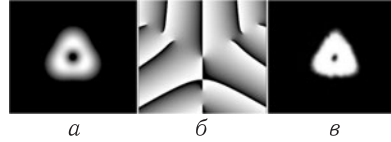


Рис. 5.8. Интенсивность (а) и фаза (б) спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\Delta_2)$ и его экспериментальная реализация (в). Распределение интенсивности (в) получено в результате астigmaticского преобразования пучка, интенсивность которого показана на рис. 5.7 в

Рассмотрим в качестве примера случай $M/N = 1/3$ (резонатор: $R_1 = 2$ м, $R_2 = \infty$, $L_0 = 3$ м). В нем будет вырождена по частоте, например, сумма мод Эрмита–Гаусса вида $\sum_k c_k \mathcal{H}_{0,3k+2}(x, y)$ (см. рис. 5.7). Подобная комбинация может быть реализована посредством внесения тонких проволок (~ 15 мкм) в поле резонатора. Легко видеть, что результатом астigmaticского преобразования такого поля будет спиральный пучком с $2\pi/3$ -симметрией (см. рис. 5.8).

Внутрирезонаторный синтез спиральных пучков. Для определения конфигурации резонаторов, позволяющих обеспечивать непосредственную генерацию спиральных пучков, рассмотрим поведение такого пучка в устойчивом резонаторе, описываемом матрицей полного обхода $ABCD$.

Как было показано в разделе 5.3, произвольный спиральный пучок F , параметр вращения которого равен θ_0 , на расстоянии l от области перетяжки выражается через моды Лагерра–Гаусса следующим образом:

$$F(r, \phi) = \frac{w_0}{w} \exp\left(\frac{ikr^2}{2R} - i\gamma_0\Phi_0\right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}\left(\frac{r}{w}, \phi\right) =$$

$$= \frac{w_0}{w} \exp\left(\frac{ikr^2}{2Q} - i\gamma_0\Phi_0\right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \left(\frac{r}{w}\right)^{|m|} e^{im\phi} L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right), \quad (5.33)$$

где $\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi) = e^{-r^2} r^{|m|} e^{im\phi} L_n^{|m|}(2r^2)$ — мода Лагерра–Гаусса в полярных координатах; Φ_0 — фазовый набег нулевой моды из плоскости перетяжки; w_0 , w — гауссовы параметры пучка в плоскости перетяжки и на расстоянии l от нее соответственно; $1/Q = 1/R + 2i/kw^2$ — комплексный параметр пучка; k — волновое число и $\mathcal{N}(\theta_0)$ — множество таких целочисленных пар (n, m) , что $2n + |m| + \theta_0 m + 1 = \gamma_0 = \text{const}$.

Здесь и далее в этом параграфе вместо ρ , $\rho|\sigma|$, $\arg \sigma$ используются соответственно w_0 , w , Φ_0 , поскольку вычисления с матрицей $ABCD$

обычно описываются в таких обозначениях. Кроме того, вместо декартовой используется полярная система координат, что позволяет более наглядно представлять зависимости, связанные с углами поворота.

Преобразование поля (5.33) оптической системой с матрицей $ABCD$ имеет вид [39]:

$$F_1(r, \phi) = \frac{w}{w_1} \exp\left(ikL_0 + \frac{ikr^2}{2Q_1}\right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} e^{-i(2n+|m|+1)\Phi} \times \left(\frac{r}{w_1}\right)^{|m|} e^{im\phi} L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{w_1^2}\right), \quad (5.34)$$

где L_0 — оптическая длина пути вдоль оси системы, $w_1^2 = w^2|A + B/Q|^2$, $\Phi = \arg(A + B/Q)$, $Q_1 = (AQ + B)/(CQ + D)$ и $AD - BC = 1$. Пусть теперь $ABCD$ — матрица полного обхода некоторого устойчивого резонатора. Из условия самовоспроизведения каждого слагаемого поля (5.33) при полном обходе резонатора $Q_1 = Q$ получим:

$$w_1 = w, \quad \frac{kw^2}{2} = \frac{B}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}(A + D)^2}}, \quad \Phi = \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right).$$

Тогда, учитывая, что $2n + |m| + 1 = \gamma_0 - \theta_0 m$, эволюция спирального пучка (5.33) при обходе резонатора будет следующей:

$$F_1(r, \phi) = \exp\left(ikL_0 - i\gamma_0 \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right)\right) F \times \left(r, \phi + \theta_0 \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right)\right). \quad (5.35)$$

Здесь L_0 — длина полного обхода резонатора. Из последнего выражения видно, что при обходе резонатора пучок поворачивается на угол $\theta_N = \theta_0 \arccos(\frac{1}{2}(A + D))$ и приобретает набег фазы $\phi_N = kL_0 - \gamma_0 \arccos(\frac{1}{2}(A + D))$. Отсюда видно, что для выполнения условия саморепродукции такого пучка достаточно осуществить его поворот либо на угол $-\theta_N$, либо на угол $2\pi - \theta_N$. Известно, что такие повороты осуществимы в кольцевых резонаторах, например, с помощью призмы Довэ (т. н. «резонаторы с вращением поля») [38]. Резонаторы такого типа использовались для улучшения однородности поперечного распределения лазерного излучения. Однако, в отличие от настоящей работы, угол поворота пучка в упомянутых резонаторах выбирался без связи с конфигурационными параметрами резонатора (обычно 90° или 180°). Если в таком резонаторе осуществляется поворот поля на угол $-\theta_N$ или $2\pi - \theta_N$ и имеет место равенство

$$kL_0 - \gamma_0 \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right) = 2\pi q,$$

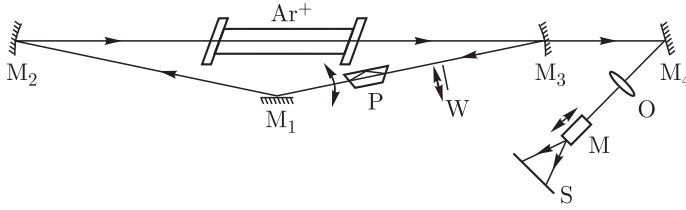


Рис. 5.9. Экспериментальная установка кольцевого лазера на базе аргон-ионного лазера

то выполняется условие саморепродукции пучка $F_1(r, \phi) = F(r, \phi)$ и поле (5.33) будет являться собственной модой этого резонатора с частотой генерации

$$\omega_q = \frac{c}{L_0} \left(\gamma_0 \arccos \left(\frac{A+D}{2} \right) + 2\pi q \right). \quad (5.36)$$

Видно, что, в отличие от обычного резонатора без вращения пучка ($\theta_0 = 0$), вырожденными по частоте будут моды Лагерра–Гаусса, удовлетворяющие условию $2n + |m| + \theta_0 m = \text{const}$, и условие вырождения зависит от угла поворота пучка в резонаторе. Это легко понять, если обратить внимание на то, что поворот распределения комплексной амплитуды пучка Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi)$ на угол θ эквивалентен приобретению им дополнительного набега фазы $m\theta$:

$$\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi + \theta) = \mathcal{L}_{n,m}(r, \phi) e^{im\theta}.$$

На рис. 5.9. показана установка, созданная для экспериментальной апробации внутрирезонаторного синтеза спиральных пучков. Кольцевой лазер реализован на базе аргон-ионного лазера с длиной волны $\lambda = 0,488$ мкм, плоским зеркалом M_1 (отражение 0,94) и сферическими зеркалами M_2, M_3 ($R_2 = R_3 = R = 3$ м, отражение 0,995 и 0,98 соответственно). Расстояния между зеркалами $M_1 M_2 = M_1 M_3 = l = 1,27$ м, $M_2 M_3 = l_0 = 2,4$ м. Такая геометрия резонатора в виде тупого треугольника была выбрана для снижения влияния астигматизма зеркал M_2, M_3 . Поворот поля осуществляется посредством призмы Довэ P (при повороте призмы на угол α пучок поворачивается на угол 2α). Следует отметить, что призма P осуществляет поворот распределения комплексной амплитуды пучка, но относительно слабо влияет на состояние поляризации пучка. Действие призмы сводится к тому, что пучок становится слегка эллиптически поляризованным. Интенсивность компоненты поля, перпендикулярной плоскости резонатора, зависит от угла поворота призмы P и составляет 0–4 % от интенсивности компоненты, лежащей в плоскости резонатора. Эллиптичность поляризации пучка имеет место лишь на участке резонатора P – M_1 – M_2 –активный элемент. В остальной части резонато-

ра направление поляризации определяется ориентацией окон Брюстера активного элемента и лежит в плоскости резонатора. Генерируемый лазером пучок наблюдался и регистрировался за частично пропускающим зеркалом M_3 с помощью объектива O и микроскопа M в плоскости экрана S . Матрица полного обхода резонатора, начиная с M_1 , имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4l}{R} - \frac{2l_0}{R} + \frac{4ll_0}{R^2} & 2l + l_0 - \frac{4l^2}{R} - \frac{4ll_0}{R} + \frac{4l^2l_0}{R^2} \\ -\frac{4}{R} + \frac{4l_0}{R^2} & 1 - \frac{4l}{R} - \frac{2l_0}{R} + \frac{4ll_0}{R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,939 & 0,446 \\ -0,267 & -0,939 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Перетяжка пучка находится в окрестности зеркала M_1 , длина Рэлея для данного пучка составляет $l_R = B/\sqrt{1 - (A + D)^2/4} \approx 1300$ мм, что соответствует гауссову параметру $w_0 = 0,45$ мм. Набег фазы для основной моды в пустом резонаторе составляет $\phi_0 = \arccos(-0,94) \approx \approx 160^\circ$ и, таким образом, частоты генерации двух соседних поперечных мод при нулевом угле поворота призмы различаются на 27 МГц, соответственно для двух соседних продольных мод частотный интервал равен 60 МГц. Изменение состава поперечных мод осуществляется введением в пучок тонкой проволоочки W диаметром ~ 15 мкм.

Угол поворота призмы P для саморепродукции спирального пучка с параметром вращения θ_0 составляет

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\theta_0}{2} \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right) = \\ &= -\frac{\theta_0}{2} \cdot 2 \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{2l}{R}\right)\left(1 - \frac{l_0}{R}\right)} = -\theta_0 \cdot 79,9^\circ. \end{aligned}$$

При выполнении экспериментов выявлено, что спиральные пучки при различных параметрах вращения реализуются при несколько ином значении поворота призмы, в частности $\alpha = -\theta_0 \cdot 78^\circ$. Данное отклонение оказалось сходным для всех экспериментов и обусловлено, видимо, наличием активной среды.

На рис. 5.10 представлены теоретические и экспериментальные результаты для двух спиральных пучков. Верхний ряд показывает результаты эксперимента по формированию спирального пучка с параметром вращения $\theta_0 = \frac{1}{3}$, $\alpha = -26^\circ$ и результаты численных расчетов для поля $F(r, \phi) = \mathcal{L}_{0,-2}(r, \phi) + 2\mathcal{L}_{0,1}(r, \phi)$. Фаза пучка имеет четыре сингулярности, или дислокации волнового фронта, причем сингулярность в центре и сингулярности на периферии имеют противоположные знаки. Нижний ряд показывает аналогичные результаты для спирального

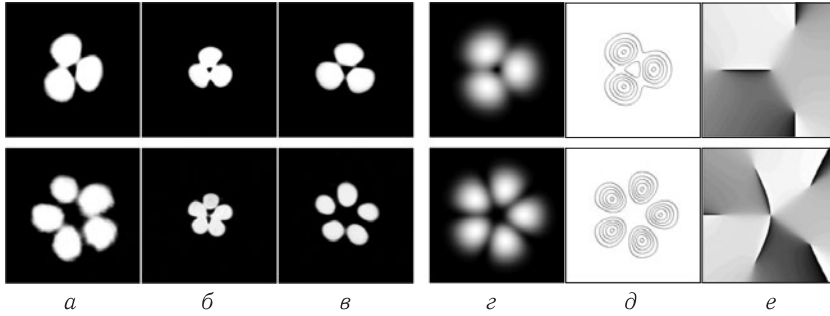


Рис. 5.10. Экспериментально зарегистрированные интенсивности спиральных пучков до (а), в (б) и после (в) области перетяжки при угле поворота призмы α . Теоретические распределения интенсивности (г) и фазы (д), а также линии уровня интенсивности (е) спирального пучка с параметром вращения θ_0 . Верхний ряд соответствует значениям $\alpha = -26^\circ$, $\theta_0 = \frac{1}{3}$; нижний ряд — значениям $\alpha \approx -15,5^\circ$, $\theta_0 = \frac{1}{5}$

пучка с параметром вращения $\theta_0 = \frac{1}{5}$, $\alpha \approx -15,5^\circ$ и численные расчеты для поля $F(r, \phi) = \mathcal{L}_{0,-3}(r, \phi) + 2\mathcal{L}_{0,2}(r, \phi)$. В этом случае фаза пучка содержит семь сингулярных точек: в центре — сингулярность типа z второго порядка (в эксперименте эта вырожденность слегка нарушена) и пять сингулярностей типа \bar{z} на периферии.

Возможности реализации различных спиральных пучков в данном эксперименте ограничивались потерями на отражение и дифракционными потерями. Во-первых, при больших углах поворота призмы (например, для пучков с $\theta_0 = 1$, $\alpha = -78^\circ$) угол падения пучка на призму Довэ далек от угла Брюстера, и потери в резонаторе становятся слишком велики. С другой стороны, реализация пучков, например, с $\theta_0 = \frac{1}{4}$ требует присутствия мод Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{n_1, m_1}(r, \phi)$ и $\mathcal{L}_{n_2, m_2}(r, \phi)$ с разницей индексов $|m_1 - m_2|$ по крайней мере 8, для которых становятся большими дифракционные потери в резонаторе. Изменение параметра резонатора $A + D$ в нашем эксперименте было затруднено по конструктивным причинам.

Таким образом, спиральные пучки — это моды кольцевого лазера с вращением поля, что подтверждено экспериментально внутрирезонаторной генерацией спиральных пучков с различными параметрами вращения и хорошим согласием с результатами численных экспериментов [65]. Полученные результаты показывают принципиальную возможность генерации спиральных пучков с весьма различными пространственными характеристиками и параметрами вращения в лазере с соответствующим резонатором и коэффициентом усиления активной среды.

Глава 6

СПИРАЛЬНЫЕ ПУЧКИ С ЗАДАНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТИ

В данной главе рассматриваются возможности формирования спиральных пучков света, интенсивность которых визуально похожа на некоторую плоскую кривую. Изучаются свойства таких пучков.

6.1. Спиральные пучки в форме плоских кривых

Полученные в предыдущей главе решения параболического уравнения (спиральные пучки света) позволяют сделать вывод, что введение дополнительной степени свободы — вращения — сильно расширяет класс решений $F(x, y, l)$, интенсивность которых сохраняет свою структуру при эволюции. Решения (5.19), (5.22) необходимо отметить особо из-за компактной формы представления и произвольности выбора целой функции $f(z)$ в широких пределах.¹⁾ Поскольку целая функция определяется своими нулями, то, изменяя их местоположение на комплексной плоскости, можно конструировать спиральные пучки с различными распределениями интенсивности. Кроме того, свойства линейного пространства, присущие множеству функций (5.19), позволяют не беспокоиться о выполнении условия (5.1) при всевозможных операциях сложения подобных функций. Потенциальные возможности, заложенные в представлении (5.19), весьма велики, однако вопрос существования решений с априорно заданной интенсивностью и конструктивный путь выделения подобного решения из семейства (5.19) является непростой задачей.

В данной главе излагается способ формирования спиральных пучков света, интенсивность которых визуально похожа на некоторую плоскую кривую. Простейший пример такого рода дает функция $f(z) = z^n$ при $n > 0$, спиральный пучок для которой, $e^{-z\bar{z}} z^n$, имеет интенсивность в форме окружности или, точнее, кольца определенной ширины. Предлагаемый далее подход позволяет строить распределение интенсивности в виде плоской кривой (или совокупности таких кривых) из некоторого набора «базисных» пучков, при этом вопросы фазовой составляющей итогового спирального пучка решаются автоматически.

¹⁾ В дальнейшем будут рассматриваться только функции вида (5.19), так как любые полученные результаты легко переносятся на функции (5.22).

Итак, рассмотрим спиральные пучки вида

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{\rho \sigma}\right). \quad (6.1)$$

Здесь $\sigma = 1 + \frac{2il}{k\rho^2}$, l — расстояние вдоль направления распространения пучка, $f(z)$ — произвольная целая аналитическая функция, k — волновое число, $\rho = \text{const}$, знак в аргументе $f(z)$ определяет направление вращения пучка при распространении.

Структурная устойчивость интенсивности пучков (6.1) при всех l позволяет, не изменяя общности, ограничиться рассмотрением пучка в плоскости перетяжки $l = 0$ (что соответствует $\sigma = 1$) и знаком «+» в аргументе функции f . Введем обозначение

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z}{\rho}\right), \quad (6.2)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ — комплексные переменные. Тогда $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ задает спиральный пучок $F(x, y, l)$ в плоскости $l = 0$ и его эволюцию при распространении. Поэтому в дальнейшем будем ссылаться на $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ как на спиральный пучок (5.19).

Рассмотрим некоторые свойства данного класса спиральных пучков, вытекающие из представления (6.2) и используемые в дальнейшем.

Свойство А. Линейная комбинация спиральных пучков также является спиральным пучком.

Свойство В. Если $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ — некоторый спиральный пучок, то $\mathcal{S}(ze^{-i\alpha}, \bar{z}e^{i\alpha})$ является спиральным пучком, который обладает тем же распределением интенсивности, что и $\mathcal{S}(z, \bar{z})$, но повернутым на угол α .

Свойство С. Если $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ — некоторый спиральный пучок, то

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) = \\ = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

является спиральным пучком, который обладает тем же распределением интенсивности, что и $\mathcal{S}(z, \bar{z})$, но смещенным в точку z_0 . В данном случае, в отличие от свойства В, замена переменной $z \rightarrow z - z_0$ не приводит сразу же к желаемому результату. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) = \\ = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) \end{aligned}$$

не является спиральным пучком, поскольку содержит множитель $\exp(-z_0\bar{z}/\rho^2)$. Умножение на линейную чисто фазовую функцию $\exp(-(\bar{z}z_0 - z\bar{z}_0)/\rho^2)$ не влияет на распределение интенсивности и приводит к спиральному пучку (6.3).

Из (6.3) при $f(z) \equiv 1$ получается «элементарный спиральный пучок»

$$\mathcal{S}_{z_0}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right), \quad (6.4)$$

который имеет гауссово распределение интенсивности, смещенное в точку z_0 . Фаза пучка является линейной функцией координат и, конечно, пучок распространяется вдоль некоторой прямой. В связи с этим поучительно рассмотреть, как реализуется его «вращение» при распространении. Используя представление (5.30), легко получить, что траектория максимума интенсивности пучка (6.4) в пространстве (x, y, l) имеет следующее выражение:

$$x + iy = z_0|\sigma|e^{i\arg\sigma} = (x_0 + iy_0)\left(1 + \frac{2il}{k\rho^2}\right), \quad (6.5)$$

где x_0, y_0 — координаты точки максимума z_0 интенсивности при $l = 0$.

Рассмотрим несколько «элементарных спиральных пучков» при $|z_0| = \text{const}$. Из (6.5) видно, что траектории максимумов пучков — прямые линии — образуют в пространстве (x, y, l) поверхность однополостного гиперболоида вращения

$$x^2 + y^2 - \frac{4|z_0|^2}{k^2\rho^4}l^2 = |z_0|^2.$$

Траектории максимумов отдельных пучков и их положение на поверхности гиперболоида показаны на рис. 6.1. Для спиральных пучков общего вида, рассмотренных в предыдущей главе, траектории движения точек, исходящих при $l = 0$ из точки z_0 , при распространении пучка также лежат на этой же поверхности гиперболоида и представляют собой в общем случае спирали.

Теперь, используя свойство **A** для суммирования смещенных в разные точки гауссовых пучков вида (6.4), уже можно формировать структурно устойчивые световые поля с новыми свойствами. Простейшим примером такого рода может служить пучок

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}[-T, T]) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \int_{-T}^T \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{2zt}{\rho^2}\right) dt, \quad (6.6)$$

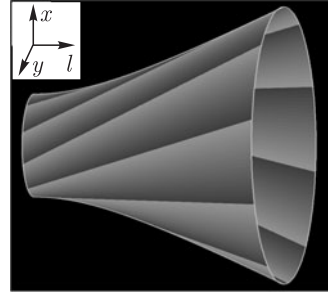


Рис. 6.1. Траектории точек максимума гауссовых пучков (6.4) — прямые линии — при $|z_0| = \text{const}$ лежат на поверхности однополостного гиперболоида

который соответствует всюду плотному заполнению пучками вида (6.4) вещественного отрезка $[-T, T]$ на комплексной плоскости (см. рис. 6.2). Пучок обладает гауссовым убыванием в любом направлении вне отрезка $[-T, T]$, и при $\rho \ll T$ почти вся энергия пучка сосредоточена в небольшой окрестности этого отрезка.

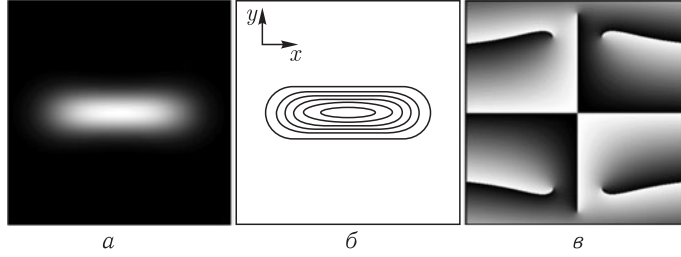


Рис. 6.2. Интенсивность (а), ее линии уровня (б) и фаза (в) спирального пучка в форме отрезка $[-T, T]$. На фазовом распределении видно наличие шести сингулярностей; точка в центре не является нулем: присутствие лишь черного и белого цветов в ее окрестности говорит о том, что там происходит склейка фаз 0 и 2π

Из (6.6) с помощью свойств **B** и **C** легко получить спиральный пучок с распределением интенсивности, имеющим форму произвольного отрезка $[z_1, z_2]$ на комплексной плоскости. Пусть $z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, $T = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$ и $\alpha = \arg(z_2 - z_1)$. Тогда отображение $z \rightarrow z_0 + ze^{i\alpha}$ переводит отрезок $[-T, T]$ в отрезок $[z_1, z_2]$. Поэтому пучок, соответствующий отрезку $[z_1, z_2]$, имеет вид

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2]) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) \times \int_{-T}^T \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{2(z - z_0)e^{-i\alpha}t}{\rho^2}\right) dt. \quad (6.7)$$

Будем называть отрезок $[z_1, z_2]$ порождающим отрезком для спирального пучка (6.7). На прямой, содержащей отрезок $[z_1, z_2]$, комплексная амплитуда пучка в точке $z_c = cz_1 + (1 - c)z_2$ равна

$$\mathcal{S}(z_c, \bar{z}_c | [z_1, z_2]) = \exp\left(i\frac{(2c - 1)\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2)}{\rho^2}\right) \int_{-c|z_2 - z_1|}^{(1-c)|z_2 - z_1|} \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2}\right) dt.$$

Таким образом, в точках прямой $z_c = cz_1 + (1 - c)z_2$, симметричных относительно точки $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2])$ при-

нимает комплексно-сопряженные значения. В частности, на концах отрезка $[z_1, z_2]$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z_1, \bar{z}_1 | [z_1, z_2]) &= \overline{\mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2 | [z_1, z_2])} = \\ &= \exp\left(i \frac{\text{Im}(z_1 \bar{z}_2)}{\rho^2}\right) \int_0^{|z_2 - z_1|} \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2}\right) dt. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Благодаря сильной локализации пучков (6.7) при $\rho \ll T$ в окрестности реализуемых отрезков, интерференция таких пучков при сложении проявляется слабо, если отрезки достаточно удалены друг от друга. В связи с этим распределение интенсивности поля, представляющее из себя совокупность таких пучков, близко к сумме их распределений интенсивности.

Рассмотрим теперь соприкасающиеся отрезки $[a, b]$ и $[b, c]$, расположенные на вещественной оси. Тогда соответствующие спиральные пучки сливаются в один «без шва»:

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | [a, c]) = \mathcal{S}(z, \bar{z} | [a, b]) + \mathcal{S}(z, \bar{z} | [b, c]).$$

В общем случае, когда два отрезка $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ лежат на одной прямой, из представления (6.7) следует, что аналогичная стыковка пучков $\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2])$ и $\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_2, z_3])$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_3]) &= \exp\left(-i \frac{\text{Im}(\bar{z}_2 z_3)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2]) + \\ &+ \exp\left(-i \frac{\text{Im}(\bar{z}_2 z_1)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_2, z_3]), \end{aligned} \quad (6.9)$$

т. е. для обеспечения гладкой стыковки необходимо согласование фаз между пучками-слагаемыми. Из (6.8)–(6.9) следует, что фазы слагаемых в точке стыковки z_2 равны:

$$\begin{aligned} \arg\left\{\exp\left(-i \frac{\text{Im}(\bar{z}_2 z_3)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2 | [z_1, z_2])\right\} &= \\ = \arg\left\{\exp\left(-i \frac{\text{Im}(\bar{z}_2 z_1)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2 | [z_2, z_3])\right\}. \end{aligned}$$

Поэтому, если рассмотреть пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2]) + e^{i\varphi} \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_2, z_3])$ при $\varphi \in [0, 2\pi)$, то однородность суммарной интенсивности вдоль отрезка $[z_1, z_3]$ будет наилучшей при

$$\varphi = \arg \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2 | [z_1, z_2]) - \arg \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2 | [z_2, z_3]) = \frac{\text{Im}(\bar{z}_2(z_3 - z_1))}{\rho^2}, \quad (6.10)$$

и равенство (6.10) можно рассматривать как условие для оптимального с точки зрения однородности интенсивности объединения двух пучков-«отрезков», когда точки z_1 , z_2 и z_3 лежат на одной прямой. Следует отметить, что равенство (6.10) может выполняться с точностью до $2\pi N$ (N — целое число), поскольку выражает связь между показателями комплексных экспонент.

Пусть теперь точки z_1 , z_2 и z_3 не лежат на одной прямой. Применим соображения по согласованию фаз для построения спирального пучка, имеющего форму ломаной $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]$. Численные эксперименты показали, что распределение интенсивности пучка

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]) = \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_1, z_2]) + \exp\left(i \frac{\text{Im}(\bar{z}_2(z_3 - z_1))}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z} | [z_2, z_3]) \quad (6.11)$$

вдоль формируемой ломаной достаточно однородно при различных углах между звеньями $[z_1, z_2]$ и $[z_2, z_3]$. Таким образом, согласование фаз является полезным принципом для конструирования спиральных пучков, реализующих различные ломаные. Формула (6.11) легко обобщается на многозвеньные ломаные.

Используя описанные выше пучки как базисные, можно строить весьма разнообразные поля, структурно устойчивые к фокусировке и распространению. Пример поля, где использованы все виды таких базисных пучков, приведен на рис. 6.3. Согласно свойству **C**, при смещении спиральный пучок приобретает дополнительную линейную фазу, поэтому базисные пучки на данном рисунке, обладающие одинаковой интенсивностью, имеют разные фазовые распределения.

Из полученных результатов естественно возникает следующий вопрос. Пусть имеется некоторая кривая на плоскости, заданная в комплексной параметрической форме $\zeta = \zeta(t)$, где параметр t пробегает некоторый интервал $[0, T]$. Существует ли спиральный пучок

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]),$$

имеющий форму этой кривой? Конечно, выражение «пучок в форме кривой $\zeta(t)$ » предполагает наличие некоторого критерия отбора, однако

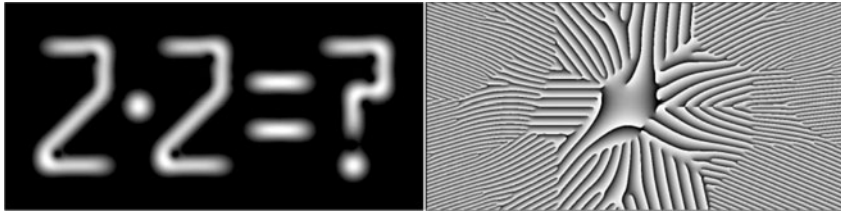


Рис. 6.3. Интенсивность и фаза пучка, построенного из базисных пучков

не будем пока останавливаться на строгой математической формулировке, полагая, что желаемым результатом будет чисто визуальное сходство. А именно: в точках z , лежащих на кривой $\zeta(t)$, интенсивность желаемого пучка должна быть как можно больше, а в остальных точках плоскости как можно меньше.

Будем строить спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T])$ как предельный случай пучков, реализующих ломаные, аппроксимирующие кривую $\zeta(t)$. Пусть параметр t кривой $\zeta(t)$ меняется от 0 до T , $\{kT/n, k = \overline{0, n}\}$ — разбиение отрезка $[0, T]$ и $\{\zeta_k = \zeta(kT/n), k = \overline{0, n}\}$ — соответствующее ему разбиение кривой $\zeta(t)$ (см. рис. 6.4). Рассмотрим в качестве аппроксимации кривой $\zeta(t)$ ломаную

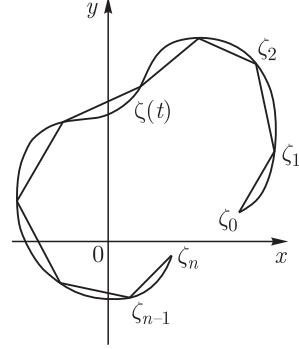


Рис. 6.4. Кривая $\zeta(t)$ и ее аппроксимирующая ломаная

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] = [\zeta_0, \zeta_1] \cup [\zeta_1, \zeta_2] \cup \dots \cup [\zeta_{n-1}, \zeta_n]$$

и набор пучков-«отрезков» $\mathcal{S}(z, \bar{z} | [\zeta_k, \zeta_{k+1}])$, реализующих отдельные звенья этой ломаной.

Используя представление (6.11) для двузвенной ломаной, запишем пучок для многозвенной аппроксимирующей ломаной:

$$\mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] \right.\right) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\varphi_k} \mathcal{S}(z, \bar{z} | [\zeta_k, \zeta_{k+1}]). \quad (6.12)$$

Здесь $\varphi_0 = 0$, а остальные константы φ_k служат для согласования фаз в точках ζ_k , $k = \overline{1, n-1}$. Условие согласования фаз для каждой пары пучков, реализующих отрезки, имеющие общую точку, выглядит следующим образом:

$$\varphi_{k-1} + \arg \mathcal{S}(\zeta_k, \bar{\zeta}_k | [\zeta_{k-1}, \zeta_k]) = \varphi_k + \arg \mathcal{S}(\zeta_k, \bar{\zeta}_k | [\zeta_k, \zeta_{k+1}]),$$

Решая эту систему и используя равенство (6.8), получим

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \sum_{j=1}^k \left(\arg \mathcal{S}(\zeta_j, \bar{\zeta}_j | [\zeta_{j-1}, \zeta_j]) - \arg \mathcal{S}(\zeta_j, \bar{\zeta}_j | [\zeta_j, \zeta_{j+1}]) \right) = \\ &= \frac{1}{2ip^2} \sum_{j=1}^k (\bar{\zeta}_j(\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}) - \zeta_j(\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1})), \quad k = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (6.12) и устремляя к нулю длину каждого звена ломаной, получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] \right.\right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left[\frac{T}{\rho^2 n} \sum_{j=1}^k \left(\bar{\zeta}_j \frac{\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}}{2T/n} - \zeta_j \frac{\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1}}{2T/n} \right) \right] \times \\
&\quad \times \exp \left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2} + \frac{z(\bar{\zeta}_k + \bar{\zeta}_{k+1})}{\rho^2} - \frac{|\zeta_k + \zeta_{k+1}|^2}{4\rho^2} \right) \times \\
&\quad \times \int_{-\frac{1}{2}|\zeta_{k+1} - \zeta_k|}^{\frac{1}{2}|\zeta_{k+1} - \zeta_k|} \exp \left(-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{t(2z - \zeta_k - \zeta_{k+1}) e^{-i \arg(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}}{\rho^2} \right) dt = \\
&= \exp \left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left(-\frac{\zeta_k \bar{\zeta}_k}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}_k}{\rho^2} \right) \times \\
&\quad \times \exp \left[\frac{T}{\rho^2 n} \sum_{j=1}^k \left(\bar{\zeta}_j \frac{\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}}{2T/n} - \zeta_j \frac{\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1}}{2T/n} \right) \right] \cdot \frac{|\zeta_{k+1} - \zeta_k|}{T/n}.
\end{aligned}$$

Рассматривая данное выражение как предел интегральной суммы, приходим к окончательной формуле:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]) &= \exp \left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2} \right) \int_0^T \exp \left(-\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau \right) |\zeta'(t)| dt. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Итак, спиральный пучок для кривой $\zeta(t)$ построен. Насколько форма его распределения интенсивности соответствует кривой $\zeta(t)$?

Как видно из (6.13) пучок оказался представлен через инварианты кривой: ориентированную площадь сектора, заметаемого при движении вдоль кривой, $(1/4i) \int_0^t (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau$, и дифференциал длины дуги, $|\zeta'(t)| dt$. Поэтому пучок определяется кривой как геометрическим объектом на плоскости, в частности, не зависит от ее параметризации.

С другой стороны, при построении пучка (6.13) принцип согласования фаз использовался для двух и только для двух соприкасающихся звеньев ломаной и не учитывалось влияние остальных. Очевидно, что при уменьшении длины звеньев ломаной протяженность соответствующих им спиральных пучков не стремится к нулю и их взаимовлияние усиливается. Кроме того, существенную роль играет форма кривой.

В качестве примера на рис. 6.5 приведены интенсивность и фаза пучка для спирали Архимеда $\zeta(t) = te^{ict}$. Шаг спирали был подобран так, чтобы показать интерференцию между ее витками. Взаимное влияние витков увеличивается при уменьшении шага, поскольку он становится сравним с гауссовым параметром пучка ρ .

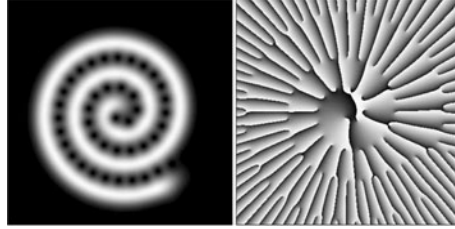


Рис. 6.5. Интенсивность и фаза спирального пучка в форме спирали Архимеда. Между витками видны изолированные нули интенсивности

Для замкнутых кривых $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ взаимовлияние проявляется в том, что при построении спиральных пучков, соответствующих вписанным ломаным, требуется согласование фаз первого и последнего звеньев в точке $\zeta_0 = \zeta_n$.

Таким образом, связь между кривой $\zeta(t)$ и спиральным пучком (6.13) в общем случае не является очевидной. Некоторые аспекты этого вопроса рассмотрены в следующем параграфе.

6.2. Замкнутые плоские кривые и условие квантования. Свойства спиральных пучков

а) Условие квантования. Пучки для замкнутых кривых занимают особое место и заслуживают отдельного рассмотрения. Пусть функция $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ описывает замкнутую кривую без самопересечений. Не изменяя общности, можно считать, что с ростом t кривая обходится в направлении против часовой стрелки. Определим $\zeta(t)$ для всех вещественных t , продолжая ее периодически за пределы отрезка $[0, T]$. Тогда функции $\zeta(t + a)$, $t \in [0, T]$ при различных a описывают одну кривую. Совпадают ли спиральные пучки для кривых $\zeta(t + a)$ при различных a ? Покажем, что пучки, построенные для замкнутых кривых, проявляют характерные свойства квантования. Это выражается в том, что, во-первых, распределение интенсивности таких пучков претерпевает радикальные изменения при преобразовании подобия $\zeta(t) \rightarrow \nu\zeta(t)$ и обладает топологией кривой $\nu\zeta(t)$ лишь при определенных дискретных значениях ν . Во-вторых, только для этих же значений ν интенсивности пучков, построенных по кривым $\nu\zeta(t + a)$ при различных a , одинаковы.

Найдем условие, при котором интенсивности спиральных пучков, построенные для кривых $\zeta(t)$ и $\zeta(t + a)$, совпадают:

$$|\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, a + T])|^2 \equiv |\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T])|^2.$$

Перепишем данное тождество в виде

$$e^{i\Psi(a)} \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, a+T]) \equiv \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]), \quad (6.14)$$

где $\Psi(a)$ — некоторая вещественная функция, не зависящая от z (иначе, сокращая обе части (6.14) на гауссову функцию, получаем, что Ψ есть аналитическая функция от z и, следовательно, не может быть вещественной функцией при всех z). Дифференцируя (6.14) по a и используя периодичность $\zeta(t)$, получим

$$\begin{aligned} e^{i\Psi(a)} \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, a+T]) & \left(i\Psi'(a) - \frac{\bar{\zeta}(a)\zeta'(a) - \zeta(a)\bar{\zeta}'(a)}{\rho^2} \right) + \\ & + \exp \left(i\Psi(a) - \frac{z\bar{z} - 2z\bar{\zeta}(a) + \zeta(a)\bar{\zeta}(a)}{\rho^2} \right) \times \\ & \times \left[\exp \left(\frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau \right) - 1 \right] \cdot |\zeta'(a)| = 0. \end{aligned}$$

Заменяя спиральный пучок в первом слагаемом в соответствии с (6.14) и сокращая на гауссову функцию, перепишем это уравнение для краткости в виде

$$f(z)F_1(a) + \exp \left(\frac{2z\bar{\zeta}(a)}{\rho^2} \right) F_2(a) = 0,$$

где $f(z)$ — целая аналитическая функция и $F_1(a)$, $F_2(a)$ — некоторые функции от a . Данное равенство справедливо для всех комплексных z и вещественных a только при $F_1(a) = F_2(a) \equiv 0$ (если $f(z)$ имеет нуль, это следует немедленно. Случай, когда $f(z)$ не имеет нулей, также прост). Поэтому

$$\Psi(a) = \frac{1}{i\rho^2} \int_0^a (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau, \quad \exp \left(\frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau \right) = 1$$

и, следовательно, [58]

$$\frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau = \frac{4iS}{\rho^2} = 2\pi iN,$$

где S — площадь, ограниченная контуром $\zeta(t)$.

Таким образом, интенсивность пучка не зависит от начальной точки интегрирования a лишь для кривых, площадь которых удовлетворяет условию квантования:

$$S = \frac{1}{2}\pi\rho^2 N \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (6.15)$$

Будем называть замкнутые кривые, которые удовлетворяют равенству (6.15), N -квантованными кривыми, а спиральные пучки для таких кривых N -квантованными пучками. Если обратиться к квантово-механической аналогии, отмеченной в предыдущей главе, то спиральным пучкам с $\theta_0 = \pm 1$, $\gamma_0 = 1$ соответствуют волновые функции частицы в постоянном магнитном поле в основном состоянии. При этом условие (6.15) соответствует квантованному магнитному потоку через контур $\zeta(t)$: $\Phi = (2\pi\hbar c/|e|)N$ (см. также [10]).

Условие квантования (6.15) естественно получается из рассмотрения замкнутых аппроксимирующих ломаных как предельный случай дополнительного условия согласования фаз первого и последнего звеньев $\varphi_{n-1} = \varphi_0 + 2\pi N$ (см. замечание после формулы (6.10)).

На рис. 6.6, 6.7 представлены интенсивности и фазы спиральных пучков в виде границ правильного треугольника и квадрата. Площади областей, ограниченных этими кривыми, равны соответственно $\frac{7}{2}\pi\rho^2$ и $4\pi\rho^2$. На фазовых распределениях видно наличие сингулярностей (изолированных нулей интенсивности), количество которых внутри соответствующих областей равно 7 и 8.

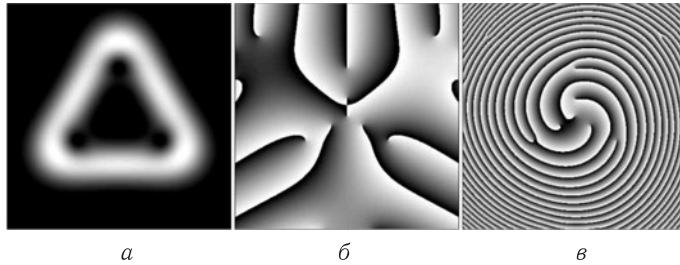


Рис. 6.6. Интенсивность (а), фаза (б) и фаза вне перетяжки (в) спирального пучка в форме границы правильного треугольника. При вычислении (6.13) в качестве кривой $\zeta(t)$ была использована гипоциклоида $i\nu\rho(2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-2it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Для N -квантованной кривой $\nu = \sqrt{N/7}$. Данный пучок соответствует $N = 7$

б) Интенсивность и фаза спирального пучка на порождающей кривой. Пучки, построенные для квантованных кривых, обладают характерным свойством. Пусть $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ — замкнутая кривая, удовлетворяющая условию (6.15). Тогда $\mathcal{S}(\zeta(t_0), \bar{\zeta}(t_0) | \zeta(t), t \in [0, T]) \neq 0$ для всех $t_0 \in [0, T]$. Иными словами, целая функция

$$f(z) = \int_0^T \exp \left(-\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau \right) |\zeta'(t)| dt$$

не имеет нулей на квантованной кривой $z \in \zeta(t)$, $t \in [0, T]$.

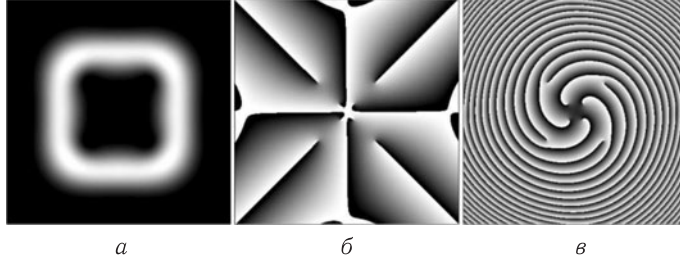


Рис. 6.7. Интенсивность (а), фаза (б) и фаза вне перетяжки (в) спирально-го пучка в форме границы квадрата. В качестве порождающей кривой была использована эпициклоида $\zeta(t) = i\nu\rho(3e^{it} - \frac{7}{20}e^{-3it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Значение $\nu = \sqrt{200N/3453}$ соответствует N -квантованной эпициклоиде. В данном случае $N = 8$

Для анализа этого утверждения рассмотрим с помощью метода перевала [66] асимптотическое поведение пучков $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \nu\zeta_1)$ при больших значениях параметра ν , где ζ_1 — произвольная 1-квантованная кривая без самопересечений. Здесь и далее будет использоваться упрощенная запись $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta)$ для спирального пучка, если кривая ζ не требует детализации.

Сделаем замену $z \rightarrow \nu z$. Тогда

$$\mathcal{S}(\nu z, \nu \bar{z} | \nu\zeta_1) = \nu \int_0^T \exp\left(-\frac{\nu^2}{\rho^2} P(t)\right) |\zeta_1'(t)| dt, \quad (6.16)$$

где комплексная функция $P(t)$ имеет вид

$$P(t) = z\bar{z} - 2z\bar{\zeta}_1(t) + \zeta_1(t)\bar{\zeta}_1(t) - \int_0^t \left(\bar{\zeta}_1(\tau)\zeta_1'(\tau) - \zeta_1(\tau)\bar{\zeta}_1'(\tau) \right) d\tau.$$

Уравнение на точки перевала $P'(t) = 2\bar{\zeta}_1'(t)(\zeta_1(t) - z) = 0$ в силу отсутствия особых точек ($\bar{\zeta}_1'(t) \neq 0$ для всех t) и самопересечений ($\zeta_1(t_1) \neq \zeta_1(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ и $t_1, t_2 \in [0, T]$) имеет решения лишь для $z \in \{\zeta_1(t), t \in [0, T]\}$. Пусть $z = \zeta_1(t_0)$ при некотором $t_0 \in [0, T]$ и пусть $\nu = \sqrt{n} \gg \rho$. Тогда $\sqrt{n} \zeta_1(t)$ есть n -квантованная кривая, подынтегральная функция в (6.16) T -периодична и равенство (6.16) можно переписать в виде

$$\mathcal{S}(\sqrt{n} z, \sqrt{n} \bar{z} | \sqrt{n} \zeta_1) = \sqrt{n} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \exp\left(-\frac{n}{\rho^2} P(t)\right) |\zeta_1'(t)| dt.$$

Здесь использовано равенство $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$, справедливое для любой T -периодической функции f и любого a . Поскольку $t = t_0$ является единственной (и невырожденной) точкой перевала, то

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\sqrt{n} \zeta_1(t_0), \sqrt{n} \bar{\zeta}_1(t_0) | \sqrt{n} \zeta_1) = \\ = \sqrt{\pi} \rho \exp \left(\frac{n}{\rho^2} \int_0^{t_0} (\bar{\zeta}_1 \zeta_1' - \zeta_1 \bar{\zeta}_1') d\tau \right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Из (6.17) видно, что в пределе при $n \rightarrow \infty$ интенсивность стремится к $\pi\rho^2$, и, следовательно, начиная с некоторого n (зависящего, конечно, от вида кривой ζ_1), справедливо неравенство

$$\mathcal{S}(\sqrt{n} \zeta_1(t_0), \sqrt{n} \bar{\zeta}_1(t_0) | \sqrt{n} \zeta_1) \neq 0.$$

Заметим, что с ростом n распределение интенсивности на кривой $\sqrt{n}\zeta_1(t)$ становится все более однородным, а отсутствие седловых точек для $z \notin \{\zeta_1(t), t \in [0, T]\}$ приводит к падению интенсивности спирального пучка вне кривой $\sqrt{n}\zeta_1(t)$. Таким образом, асимптотическое поведение интенсивности спирального пучка придает математическую основу выражению «пучок в форме кривой $\zeta(t)$ ».

Для $\nu \neq \sqrt{n}$ (т. е. для неквантованной кривой $\nu\zeta_1(t)$) асимптотическая оценка подобна формуле (6.17), если точка t_0 не расположена в непосредственной близости от граничных точек. Однако, если $t_0 = T$ (или $t_0 = 0$), то подынтегральная функция в (6.16) не является T -периодической и заменять отрезок интегрирования $[0, T]$ на $[t_0 - T/2, t_0 + T/2]$ нельзя. В связи с этим следует рассматривать точки $t = 0$ и $t = T$ как два различных решения уравнения на точки перевала, и асимптотическая оценка примет вид

$$\mathcal{S}(\nu\zeta_1(T), \nu\bar{\zeta}_1(T) | \nu\zeta_1) = \sqrt{\pi} \rho \frac{1 + e^{2\pi i \nu^2}}{2} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right). \quad (6.18)$$

Из данного выражения следует, что для $\nu \neq \sqrt{n}$ интенсивность на кривой $\nu\zeta_1(t)$ не стремится при $\nu \rightarrow \infty$ к константе $\pi\rho^2$ и, кроме того, место неоднородности интенсивности на кривой $\nu\zeta_1(t)$ определяется начальной точкой интегрирования. На рис.6.8 показаны варианты изменения распределения интенсивности неквантованного спирального пучка треугольной формы в зависимости от выбора начальной точки интервала интегрирования.

Отметим еще раз асимптотический характер полученных выражений. Более детальный анализ формулы (6.17) позволяет усилить утверждение относительно порядка остаточного члена, однако вопрос строгого доказательства неравенства

$$\mathcal{S}(\sqrt{n} \zeta_1(t_0), \sqrt{n} \bar{\zeta}_1(t_0) | \sqrt{n} \zeta_1) \neq 0 \quad (n \geq 1)$$

все еще остается открытым.

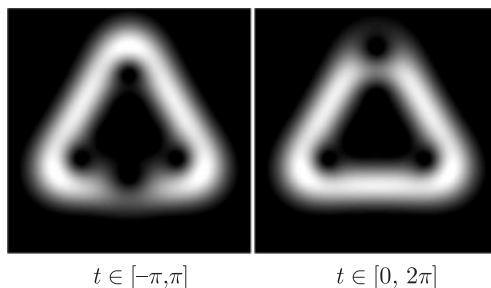


Рис. 6.8. Интенсивности спиральных пучков (6.13), построенных для гипотиклоиды $\zeta(t) = 1,0425i\rho(2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-2it})$ и различных интервалов интегрирования. Параметр 1,0425 находится между 1 и $\sqrt{8/7}$, что соответствует промежуточному положению между 7- и 8-квантованной кривыми

Можно привести несколько эквивалентных формулировок этого неравенства, например, следующую, в которой отсутствует явное упоминание о спиральных пучках.

Пусть для некоторой замкнутой гладкой кривой на плоскости, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0, T]$, выполняются следующие условия:

1) кривая начинается и заканчивается в центре координат:

$$x(0) = x(T) = 0, \quad y(0) = y(T) = 0;$$

2) кривая не имеет точек самопересечения:

$$x(t_1) + iy(t_1) \neq x(t_2) + iy(t_2) \quad \text{при } t_1 \neq t_2 \text{ и } t_1, t_2 \in [0, T];$$

3) площадь области, ограниченной данной кривой, удовлетворяет условию квантования:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt = \frac{\pi n}{2} \quad (n \geq 1).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^T e^{-x^2(t)-y^2(t)} \cos\left(4 \int_0^t (x(\tau)y'(\tau) - x'(\tau)y(\tau)) d\tau\right) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt > 0. \quad (6.19)$$

Все три условия существенны для данного утверждения, а выражение в левой части последнего неравенства неотделимо от нуля (т.е. нулевая константа не может быть заменена на чуть большую). Основная проблема заключается в эффективном использовании второ-

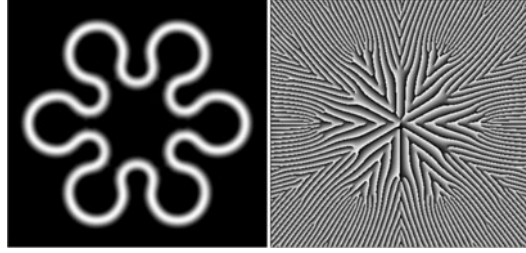


Рис. 6.9. Интенсивность и фаза спирального пучка, построенного по 97-квантованной кривой в форме снежинки

го условия.¹⁾ На рис.6.9 показан пример спирального пучка, иллюстрирующий эту трудность. В тех местах, где участки кривой почти касаются друг друга, присутствующие нули подходят очень близко к порождающей кривой, и только условие 2 мешает им расположиться на самой кривой и, тем самым, превратить неравенство (6.19) в равенство.

в) Число нулей спирального пучка внутри области, ограниченной порождающей кривой. Рассмотрим циркуляцию градиента фазы квантованного пучка

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{N} \zeta_1) = \sqrt{I(x, y)} e^{i\phi(x, y)}$$

вдоль своего порождающего контура. Как следует из [33, 48] (см. также § 4 четвертой главы, посвященный интегральным инвариантам),

$$\oint_{\sqrt{N} \zeta_1} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \sum_n \text{sgn} \text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n), \quad (6.20)$$

где скалярная функция

$$\text{rot}_0 \mathbf{j} = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

¹⁾ Простоту его формулировки нельзя недооценивать. В [67] рассматривалась следующая задача: какой формы должна быть прямоугольная полоска бумаги, чтобы из нее можно было сделать ленту Мебиуса? Ясно, что полоска должна быть узкой и длинной (из квадратного листа, например, ленту Мебиуса не сделаешь). Поиск минимально возможного отношения длины полоски к ее ширине привел к следующему результату:

$$\frac{\pi}{2} \leq \inf \frac{\text{длина}}{\text{ширина}} \leq \sqrt{3},$$

однако точное равенство не было найдено, поскольку не удалось ответить на все тот же вопрос: «Как использовать условие отсутствия самопересечений?».

есть продольная составляющая ротора вектора потока световой энергии \mathbf{j} , и суммирование производится по всем нулям z_n спирального пучка, находящимся внутри контура $\sqrt{N} \zeta_1(t)$ с учетом кратности.¹⁾

Для спиральных пучков (6.13), как и для общих пучков (5.20), $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n) = -\text{sgn } \theta_0 = 1$, поэтому

$$\oint_{\sqrt{N} \zeta_1} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 2\pi N_0,$$

где N_0 — количество нулей пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{N} \zeta_1)$ внутри контура $\sqrt{N} \zeta_1(t)$ с учетом их кратности.

Покажем, что

$$N_0 = N. \quad (6.21)$$

Поскольку $N = 2S/\pi\rho^2$, то равенство (6.21) связывает число нулей квантованного пучка в области, ограниченной порождающей кривой, с площадью самой области.

Предваряя доказательство, рассмотрим построение спиральных пучков в форме окружности. Используя представление (6.13) и отбрасывая несущественный постоянный множитель, получающийся в результате интегрирования, найдем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z, \bar{z} | Re^{it}, t \in [0, 2\pi]) &= \\ &= \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2R^2/\rho^2 - n)\pi}{2R^2/\rho^2 - n} \cdot \frac{(-2zR/\rho^2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Из условия квантования для окружности $S = \pi R^2 = \frac{1}{2}\pi\rho^2 N$ следует $2R^2/\rho^2 = N$, и ряд сводится к одному N -му члену:

$$\mathcal{S}\left(z, \bar{z} | \rho\sqrt{\frac{1}{2}N} e^{it}, t \in [0, 2\pi]\right) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \left(\frac{z}{\rho}\right)^N. \quad (6.22)$$

Таким образом, квантованными спиральными пучками для окружности являются известные пучки Лагерра–Гаусса. Справедливость равенства (6.21) в этом случае очевидна.

Предположим теперь, что существует некоторая N -квантованная кривая $\hat{\zeta}(t)$, для которой не выполняется равенство (6.21). Тогда построим семейство замкнутых кривых $\zeta(t, c)$, зависящее от параметра $c \in [0, 1]$, которое начинается с N -квантованной окружности $\zeta(t, 0) = \rho\sqrt{\frac{1}{2}N} e^{it}$, заканчивается кривой $\zeta(t, 1) = \hat{\zeta}(t)$ и имеет фиксированную площадь ограничиваемой области $S = \frac{1}{2}\pi\rho^2 N$ для каждой

¹⁾ Если z_n — вырожденный нуль, то $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n) = 0$ и формула (6.20) нуждается в уточнении. Можно показать, что для спиральных пучков (6.1) функция $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z)$ знакопостоянна в малой окрестности точки z_n . Поэтому $\text{sgn } \text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n)$ в данном случае понимается как $\lim_{z \rightarrow z_n} \text{sgn } \text{rot}_0 \mathbf{j}(z)$.

кривой $\zeta(t, c)$. Это гарантирует выполнение условия квантования (6.15) для всех $c \in [0, 1]$ при непрерывной деформации окружности. С другой стороны, спиральный пучок для окружности удовлетворяет условию (6.21), а спиральный пучок для кривой $\hat{\zeta}(t)$ — нет. Поэтому при некотором c число нулей N -квантованного спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t, c))$ в области, ограниченной контуром $\zeta(t, c)$, должно измениться. Относительно механизма изменения количества нулей спирального пучка при изменении порождающей кривой справедливы следующие рассуждения. Нули спирального пучка есть нули соответствующей аналитической функции. Из принципа максимума модуля [6] следует, что модуль аналитической функции не имеет минимума внутри области, если только этот минимум не есть нуль функции. Следовательно, никакой нуль не может возникнуть из минимума модуля функции или трансформироваться в минимум внутри области при изменении параметра c , поскольку никакого такого минимума для аналитической функции не существует. Поэтому изменение числа нулей есть результат проникновения нуля снаружи области, ограниченной контуром $\zeta(t, c)$, вовнутрь, или наоборот. Но в таком случае существует такое значение параметра $c = c_0$, при котором спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t, c_0))$ имеет нуль на контуре $\zeta(t, c_0)$, что, как уже отмечалось, невозможно.

Таким образом, квантованному пучку соответствует строго определенное количество фазовых сингулярностей внутри области, ограниченной порождающей кривой, которое зависит от площади области, но не от ее формы [58]. Отсюда следует, что при изменении площади области, например, от $S = \frac{1}{2}\pi\rho^2 N$ до $S = \frac{1}{2}\pi\rho^2(N + 1)$ происходит увеличение числа нулей внутри области посредством прихода одного нуля извне. На рис. 6.10 показана эволюция спирального пучка для окруж-

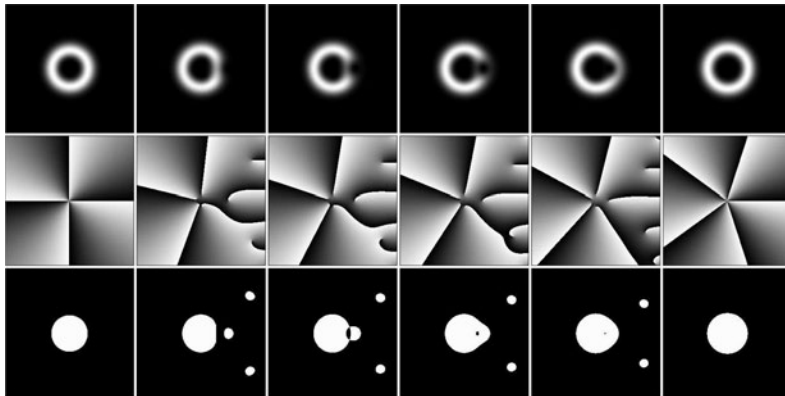


Рис. 6.10. Эволюция спирального пучка при изменении радиуса порождающей окружности: интенсивность (верхний ряд), фаза (средний ряд) и знак ротора $\text{rot}_0 \mathbf{j}$ вектора потока световой энергии (нижний ряд). Черный цвет соответствует отрицательным значениям ротора, белый — положительным

ности $\zeta(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ при $2R^2/\rho^2 \in [4, 0; 5, 0]$ и виден процесс проникновения нуля внутрь контура. Ограниченные размеры графических изображений не позволяют вместе с изменениями в центре кольца увидеть, что происходит в это время на периферии. С увеличением радиуса R порождающей окружности, когда спиральный пучок перестает быть квантованным и вырожденный нуль в центре распадается на четыре простых, на бесконечности образуется клин нулей, который по мере роста R все ближе и ближе подходит к этой четверке. Нуль, находящийся на острие клина, внедряется внутрь круга, ограниченного порождающей окружностью, остальные нули остаются снаружи. После этого начинается одновременное сближение внутренней пятерки нулей и удаление от них клина нулей, потерявшего одного своего представителя. Когда спиральный пучок вновь становится квантованным, нули в центре сливаются в нуль пятого порядка, а клин исчезает на бесконечности. Зона проникновения нуля, как было сказано выше, определяется точкой начала интегрирования.

г) Спиральные пучки для симметричных кривых. Симметрия замкнутых кривых проявляется в свойствах соответствующих спиральных пучков. Пусть кривая $\zeta(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ переходит в себя при повороте на угол $2\pi/M$, т. е. $\zeta(t + 2\pi/M) = \zeta(t) \exp(2\pi i/M)$. Тогда квантованные спиральные пучки $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n)$, построенные по соответствующим квантованным кривым $\zeta_n(t)$, обладают следующими свойствами:

- $\mathcal{S}(ze^{2\pi i/M}, \bar{z}e^{-2\pi i/M} | \zeta_n) = \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n)e^{2\pi in/M}$;
- $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n)$ имеет в точке $z = 0$ нуль кратности $n - [n/M]M$. Если $n \geq M$, то остальные нули, находящиеся внутри контура $\zeta_n(t)$, расположены в вершинах правильных M -угольников (одного или нескольких). Например, $M = 3$ для гипоциклоиды Δ_7 : $\zeta(t) = i\rho(2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-2it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Поэтому пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \Delta_7)$ содержит простой нуль в точке $z = 0$ и шесть других в вершинах двух правильных треугольников (см. рис.6.6);
- Если $n - m$ не делится на M , то пучки $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n)$ и $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_m)$ ортогональны в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n), \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_m))_{L_2(\mathbb{R}^2)} &= \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}(x + iy, x - iy | \zeta_n) \overline{\mathcal{S}(x + iy, x - iy | \zeta_m)} dx dy = \\
 &= \int_0^{2\pi} \mathcal{S}(\zeta_m, \bar{\zeta}_m | \zeta_n) \exp\left(-\frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}_m \zeta'_m - \zeta_m \bar{\zeta}'_m) d\tau\right) |\zeta'_m(t)| dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi/M} \mathcal{S}(\zeta_m, \bar{\zeta}_m | \zeta_n) \exp \left(-\frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}_m \zeta'_m - \zeta_m \bar{\zeta}'_m) d\tau \right) |\zeta'_m(t)| dt \times \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{M-1} e^{2\pi i(n-m)k/M} = 0.
\end{aligned}$$

Например, для окружности в качестве M можно взять сколь угодно большое натуральное число. Поэтому

$$(\mathcal{S}(z, \bar{z} | \bigcirc_n), \mathcal{S}(z, \bar{z} | \bigcirc_m))_{L_2(\mathbb{R}^2)} = 0$$

для всех $n \neq m$. Этот результат хорошо известен, поскольку является частным случаем ортогональности мод Лагерра–Гаусса.

д) Спиральные пучки как обобщения мод Лагерра–Гаусса. Согласно (6.22), моды Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{0,n}(x, y)$ есть частный случай квантованных спиральных пучков, когда в качестве порождающей кривой выбирается окружность. Можно получить все семейство мод Лагерра–Гаусса в терминах порождающих кривых. Для этого перепишем выражение (5.20) при $l = 0$ в следующем виде:

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z}) = e^{Z\bar{Z}} \frac{\partial^m}{\partial Z^m} \left(e^{-2Z\bar{Z}} f(Z) \right) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{\rho} \right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z}). \quad (6.23)$$

Здесь $z = x + iy$, $Z = z/\rho$, $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ и вместо N используется обозначение m . Отметим, что оператор, действующий на $\mathcal{S}(z, \bar{z})$, есть оператор рождения для гамильтониана, описывающего движение частицы в однородном магнитном поле [64].

Подставляя вместо $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ спиральный пучок для n -квантованной окружности $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \bigcirc_n) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2)(z/\rho)^n$, получим с точностью до постоянного множителя моды Лагерра–Гаусса общего вида (см. рис. 6.11):

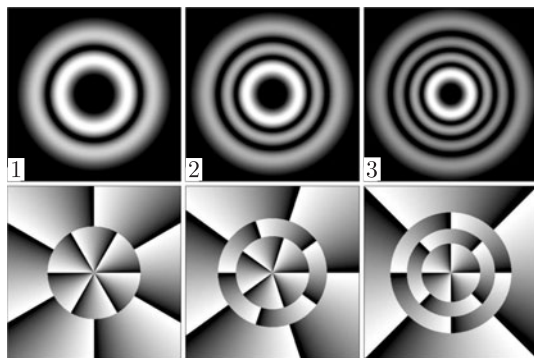
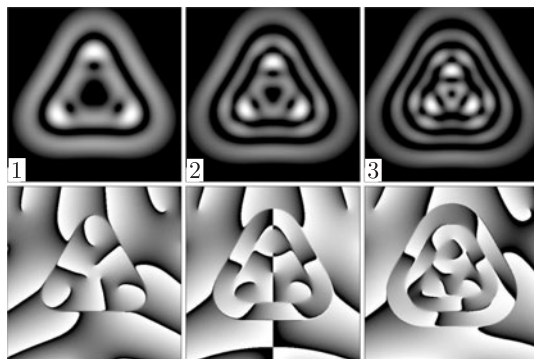
$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \bigcirc_n) = \mathcal{L}_{\min(m,n), n-m} \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho} \right).$$

Таким образом, спиральные пучки в виде замкнутых кривых можно рассматривать как обобщение пучков Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{0,n}(x, y)$.

Эту аналогию можно продолжить и построить для каждой порождающей кривой семейство спиральных пучков, соответствующее полному семейству пучков Лагерра–Гаусса. Для этого в представлении (6.23) в качестве поля $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ выберем n -квантованный спиральный пучок в форме произвольной порождающей кривой $\zeta(t)$. Тогда полученное поле будет иметь вид:

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \sqrt{n} \zeta_1) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{\rho} \right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{n} \zeta_1), \quad (6.24)$$

где, как и ранее, $\zeta_1(t)$ — 1-квантованная кривая.

Рис. 6.11. Интенсивности и фазы пучков $\mathcal{L}_{m,7-m}(x, y)$ при $m = 1, 2, 3$ Рис. 6.12. Интенсивности и фазы пучков $\mathcal{S}_m(z, \bar{z}|\Delta_7)$ при $m = 1, 2, 3$

Пучки (6.24) поворачиваются при распространении, как и исходный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\sqrt{n}\zeta_1)$, так как имеют тот же параметр вращения $\theta_0 = -1$. Кроме того, они наследуют черты порождающей кривой. Примеры пучков для 7-квантованной гипоциклоиды треугольной формы, аналогичные пучкам Лагерра–Гаусса, приведены на рис. 6.12. Интересно отметить, что, в отличие от пучков Лагерра–Гаусса, линии пониженной интенсивности уже не являются нулевыми линиями и данная структура интенсивности обеспечивается лишь изолированными нулями, имеющими достаточно сложный вид и имитирующими нулевые линии интенсивности.

е) Спиральные пучки в форме кривых с самопересечениями.

В данном разделе исследуется вопрос построения спиральных пучков, интенсивность которых визуально похожа на некоторую кривую ζ с точками самопересечения. Будет рассмотрен случай, когда кривая ζ имеет только одну такую точку, причем в этой точке пересекаются две

и только две дуги кривой. Общий случай требует более громоздких вычислений, но, в принципе, решается аналогично.

Пусть $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ — некоторая гладкая кривая, имеющая единственную точку самопересечения:

$$\zeta(t_1) = \zeta(t_2), \quad 0 < t_1 < t_2 < T.$$

Более того, будем предполагать, что в этой точке пересекаются две и только две дуги кривой (см. рис. 6.13).

Исследуем с помощью метода перевала асимптотическое поведение спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | R\zeta)$ при $R \rightarrow \infty$. Делая замену переменной $z \rightarrow Rz$ в выражении (6.13), получаем

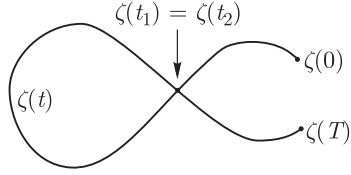


Рис. 6.13. Кривая $\zeta(t)$ с точкой самопересечения

$$\mathcal{S}(Rz, R\bar{z} | R\zeta) = R \int_0^T e^{-R^2 P(t)} |\zeta'(t)| dt, \quad (6.25)$$

где комплексная функция $P(t)$ имеет вид

$$P(t) = z\bar{z} - 2z\bar{\zeta}(t) + \zeta(t)\bar{\zeta}(t) - \int_0^t (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau.$$

Уравнение на точки перевала

$$P'(t) = 2\bar{\zeta}'(t)(\zeta(t) - z) = 0 \quad (6.26)$$

в силу отсутствия особых точек ($\bar{\zeta}'(t) \neq 0$ для всех t) имеет решения лишь тогда, когда точка z лежит на кривой $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$. В противном случае, уравнение (6.26) не имеет решений и комплексная амплитуда спирального пучка является бесконечно малой величиной:

$$\mathcal{S}(Rz, R\bar{z} | R\zeta) = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Если точка z лежит на кривой ζ , то возможны три случая.

1. Точка z лежит на кривой ζ , но не является ни граничной точкой, ни точкой самопересечения, т. е. $z = \zeta(t_0)$, $t_0 \notin \{0, t_1, t_2, T\}$. Тогда уравнение (6.26) имеет единственное решение: $t = t_0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(Rz, R\bar{z} | R\zeta) &= \sqrt{\pi} e^{-R^2 P(t_0)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \\ &= \sqrt{\pi} \exp\left(R^2 \int_0^{t_0} (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \end{aligned} \quad (6.27)$$

и, следовательно, во всех точках кривой ζ , кроме граничных точек и точки самопересечения, интенсивность спирального пучка, в асимптотическом смысле, постоянна:

$$|\mathcal{S}(Rz, R\bar{z} | R\zeta)|^2 = \pi. \quad (6.28)$$

2. Точка z совпадает с точкой самопересечения: $z = \zeta(t_1) = \zeta(t_2)$. Тогда уравнение (6.26) имеет два решения: $t = t_1$ и $t = t_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(Rz, R\bar{z} | R\zeta) &= \sqrt{\pi} e^{-R^2 P(t_1)} + \sqrt{\pi} e^{-R^2 P(t_2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \\ &= \sqrt{\pi} e^{-R^2 P(t_1)} \left[1 + \exp\left(R^2 \int_{t_1}^{t_2} (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right) \right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \\ &= \sqrt{\pi} e^{-R^2 P(t_1)} \left[1 + e^{4iS_c} \right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \end{aligned} \quad (6.29)$$

где S_c — ориентированная площадь области, ограниченной витком кривой $R\zeta(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Таким образом, для сохранения свойства однородности интенсивности (6.28) в точке самопересечения необходимо выполнение равенства

$$\begin{aligned} |1 + e^{4iS_c}| = 1 &\Rightarrow 2 + 2\cos(4S_c) = 1 \Rightarrow \cos(4S_c) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ S_c &= \frac{R^2}{4i} \int_{t_1}^{t_2} (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi M}{2}, \quad M \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

3. Точка z является граничной точкой: $z = \zeta(0)$ или $z = \zeta(T)$.

Для незамкнутой кривой ζ , т.е. при $\zeta(0) \neq \zeta(T)$, уравнение (6.26) имеет единственное решение: $t = 0$ для $z = \zeta(0)$, и $t = T$ для $z = \zeta(T)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(R\zeta(0), R\bar{\zeta}(0) | R\zeta) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-R^2 P(0)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right); \\ \mathcal{S}(R\zeta(T), R\bar{\zeta}(T) | R\zeta) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-R^2 P(T)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(R^2 \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right). \end{aligned}$$

Для замкнутой кривой ζ , т.е. при $\zeta(0) = \zeta(T)$, уравнение (6.26) имеет два решения: $t = 0$ и $t = T$. Следовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(R\zeta, R\bar{\zeta} | R\zeta) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-R^2 P(0)} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-R^2 P(T)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \exp\left(R^2 \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right) \right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + e^{4iS} \right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \end{aligned} \quad (6.31)$$

где S — ориентированная площадь области, ограниченной кривой $R\zeta(t)$, $t \in [0, T]$. В данном случае кривая $R\zeta$ состоит из двух витков:

$$c_1 = \{R\zeta(t), t \in [t_1, t_2]\}, \quad c_2 = \{R\zeta(t), t \in [0, t_1] \cup [t_2, T]\}.$$

Поэтому ориентированная площадь S — это разность площадей, ограниченных витками: $S = S_{c_1} - S_{c_2}$, и для сохранения свойства однородности интенсивности (6.28) в начально-конечной точке необходимо выполнение равенства

$$\begin{aligned} |1 + e^{4iS}| = 2 &\Rightarrow 2 + 2\cos(4S) = 4 \Rightarrow \cos(4S) = 1 \Rightarrow \\ S = S_{c_1} - S_{c_2} &= \frac{R^2}{4i} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau = \frac{\pi N}{2}, \quad N \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Очевидно, что когда область одного витка стремится к нулю, мы получаем обычное условие квантования (6.15).

Таким образом, независимо от замкнутости или незамкнутости кривой ζ наличие точки самопересечения приводит к условию (6.30).

Для замкнутых кривых с точкой самопересечения совместное выполнение условий (6.30), (6.32) может оказаться невозможным, поскольку при плавном увеличении параметра R площади S_c и S будут принимать соответствующие дискретные значения не одновременно:

$$\begin{cases} S_c = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi M}{2} & \text{при } R \stackrel{(6.30)}{=} R_M^\pm, \quad M \in \mathbb{Z}; \\ S = \frac{\pi N}{2} & \text{при } R \stackrel{(6.32)}{=} R_N, \quad N \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\{R = R_M^\pm, M \in \mathbb{Z}\} \cap \{R = R_N, N \in \mathbb{Z}\} = \emptyset.$$

Однако, квадратичная зависимость каждой из площадей от параметра R показывает, что при больших M и N

$$R_{M+1}^\pm - R_M^\pm \sim \frac{1}{\sqrt{M}} \quad R_{N+1} - R_N \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Поэтому с ростом M и N соответствующие значения R_M^\pm и R_N будут все ближе друг к другу и визуальное сходство интенсивности спирального пучка с кривой $R\zeta(t)$ будет улучшаться.

Если определить константы c_1 и c_2 :

$$c_1 = \frac{1}{4i} \int_{t_1}^{t_2} (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau, \quad c_2 = \frac{1}{4i} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau,$$

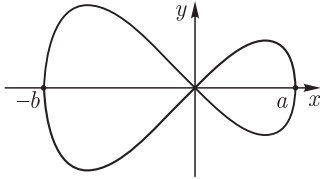
то условия квантования (6.30), (6.32) примут вид:

$$c_1 R^2 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi M}{2}, \quad c_2 R^2 = \frac{\pi N}{2} \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{M \pm \frac{1}{3}}{N} = \frac{3M \pm 1}{3N}.$$

Как следствие, если c_1/c_2 разложить в цепную дробь, то подходящие дроби, знаменатель которых делится на 3, позволят определить числа N , M . Тогда R можно будет найти или из равенства (6.30), или из равенства (6.32). Чем ближе будет подходящая дробь к c_1/c_2 , тем меньше будет различие между R_M^\pm и R_N , и тем лучше интенсивность спирального пучка будет похожа на порождающую кривую.

Пример: спиральный пучок для «знака бесконечности».

Пусть a , b — вещественные положительные числа и их отношение фиксировано: $\frac{a}{b} = w \in [0, 1]$. Рассмотрим кривую $\zeta(t)$, заданную в неявном виде (см. рис. 6.14):



$$y^2 = x^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{b}\right), \quad x \in [-b, a],$$

Рис. 6.14. Кривая $\zeta(t)$ в форме знака бесконечности

и имеющую форму знака бесконечности. Делая две замены $a \rightarrow wR$, $b \rightarrow R$, мы получаем множество кривых $R\zeta(t)$:

$$y^2 = x^2 \left(1 - \frac{x}{wR}\right) \left(1 + \frac{x}{R}\right). \quad (6.33)$$

Форма интенсивности спирального пучка для кривой (6.33) зависит не только от величины масштабного множителя кривой R , но и от других параметров. Значение w определяет соотношение площадей, ограниченных левым и правым витками. Начально-конечная точка интегрирования определяет место проникновения нулей внутрь контура $R\zeta$ при увеличении R .

Процесс изменения структуры интенсивности спирального пучка для кривой (6.33) более сложен, чем аналогичный процесс для любой кривой без самопересечений. Мы рассмотрим динамику изменения

интенсивности спирального пучка для кривой (6.33) для случаев $w = 1$ и $w = 0,75$.

В случае $w = 1$ витки кривой (6.33) одинаковы, поэтому ориентированная площадь S , ограниченная всей кривой, равна нулю. Таким образом, условие (6.32) выполнено для всех R независимо от начально-конечной точки интегрирования. Симметричный вид кривой (6.33) по x, y диктует следующий сценарий движения нулей с ростом параметра R : 1) нули приходят извне парами, двигаясь по оси y сверху и снизу к центру координат; 2) при некотором значении R они сливаются в один нуль второго порядка; 3) затем этот нуль опять разделяется на пару нулей, которые расходятся по оси x влево и вправо — каждый в свою область, ограниченную витком кривой. На рис. 6.15 показан фрагмент этого процесса.

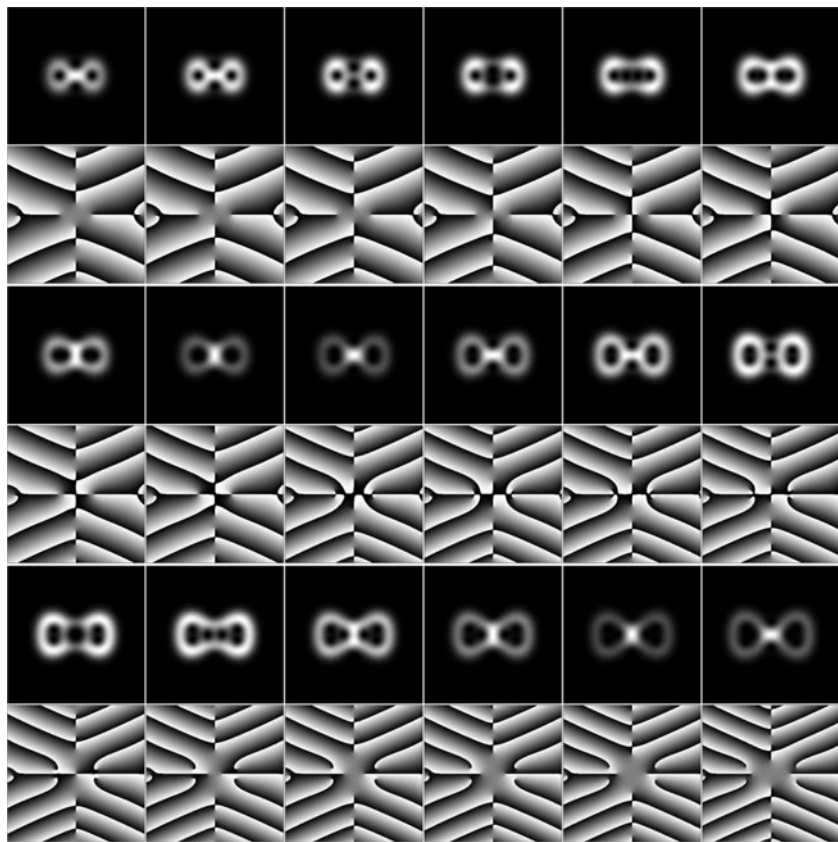


Рис. 6.15. Процесс изменения интенсивности и фазы спирального пучка для кривой (6.33) при $w = 1$ с ростом R (слева направо и сверху вниз)

В случае $w = 0,75$ площади витков различны, поэтому условие (6.32) существенно. Пусть начально-конечная точка интегрирования совпадает с точкой $(-R, 0)$. Тогда, в силу симметрии кривой, с ростом R нули будут приходить по оси x и проникать в область, ограниченную левым витком кривой. Кроме того, условие (6.30) в точке самопересечения дает еще одну возможность для проникновения нулей. А именно, с ростом R нули будут приходить парами по оси y (аналогично случаю $w = 1$) и расходиться по разным областям. На рис. 6.16 показан фрагмент этого процесса.

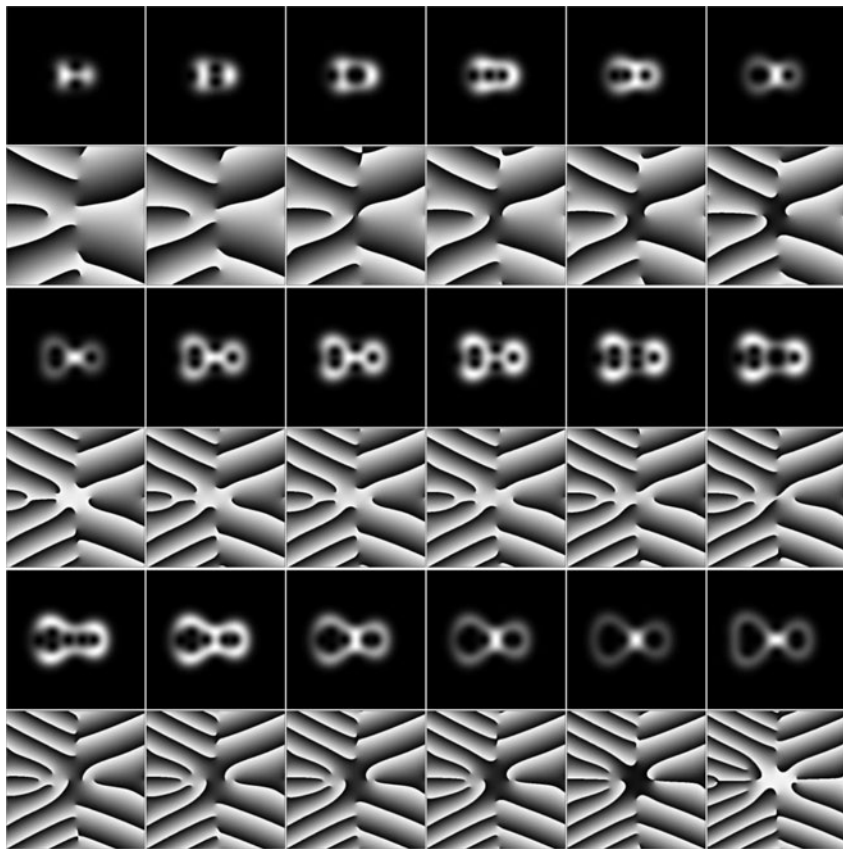


Рис. 6.16. Процесс изменения интенсивности и фазы спирального пучка для кривой (6.33) при $w = 0.75$ с ростом R (слева направо и сверху вниз)

Поскольку площадь каждой области, ограниченной витком, пропорциональна числу нулей внутри области, и, кроме того, пропорциональна квадрату линейного размера, то отношение числа нулей в каждой

из областей есть

$$\frac{\# \text{ нулей в правой области}}{\# \text{ нулей в левой области}} \approx \frac{S_{\text{right}}}{S_{\text{left}}} = \frac{(wR)^2}{R^2} = w^2. \quad (6.34)$$

Для случая $w = 0,75$ отношение площадей витков равно

$$\frac{S_{\text{right}}}{S_{\text{left}}} = \frac{9}{16}.$$

Как видно на некоторых фрагментах рис. 6.16, пока это отношение составляет $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$. Но с ростом R условие (6.34) будет выполняться все более точно (см. рис. 6.17).

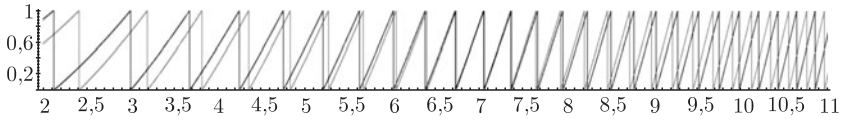


Рис. 6.17. Графики функций $f_1(R) = \frac{2c_1}{\pi} R^2 - \frac{1}{3} (\text{mod } 1)$ (сплошная линия) и $f_2(R) = \frac{2c_2}{\pi} R^2 (\text{mod } 1)$ (пунктир). Скачки на графике f_2 соответствуют значениям R , для которых выполняется условие квантования всей площади, а скачки на графике f_1 соответствуют значениям R , для которых квантуется площадь одного витка. Близко расположенные скачки графиков f_1 и f_2 соответствуют значению R , для которого с хорошей точностью одновременно выполняются условия (6.32) и (6.30)

Однако проникающие нули не всегда будут расходиться по разным областям. Возможно и проникновение обоих нулей в одну и ту же область (большую, конечно). Более того, для кривой (6.33) с еще меньшим параметром w наблюдались ситуации, когда проникший внутрь изолированный нуль через какое-то время опять выходил наружу.

ж) Методы синтеза структурно устойчивых пучков с заданным распределением интенсивности.

Метод амплитудно-фазовой маски. Экспериментальная реализация спиральных пучков (6.13) осуществлялась следующим образом [58]. Рассчитанные на компьютере амплитудные полутоновые маски для амплитуды и фазы были сделаны на фотоплоттере (разрешение 1024×1024 элементов, размер 10×10 мм²). Амплитудная маска фазы использовалась для изготовления фазового элемента на бихромированной желатине. Комбинация амплитудной A и фазовой P масок дает требуемое амплитудно-фазовое распределение. Для реализации спирального пучка треугольного вида (см. рис. 6.6, а, б) было использовано фазовое распределение, показанное на рис. 6.6, в, поскольку его пространственная частота выше, чем у распределения на рис. 6.6, б. Кроме того, на фазовое распределение в перетяжке пучка налагалась квадра-

тичная фазовая добавка с кривизной волнового фронта $0,002 \text{ мм}^{-1}$ для увеличения дифракционной эффективности фазового элемента.

Схема эксперимента приведена на рис. 6.18, а. Пучок от лазера L расширяется и освещает амплитудно-фазовый элемент AP (элемент был повернут на 90° по сравнению с распределением, показанным на рис. 6.6). Линза 3 ($f = 250 \text{ мм}$) осуществляет фокусировку $+1$, 0 , -1 порядков дифракции в плоскости $+1$, 0 , -1 соответственно. Дифракционная эффективность в этих порядках была следующей: $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 \approx 10 : 7 : 3$, $\eta_1 \approx 40\%$. Схематично картина распределений интенсивности в плоскостях 0 , ± 1 показана в нижней части рисунка. В порядках $+1$ и -1 реализуются спиральные пучки, вращающиеся в противоположные стороны: $\mathcal{S}_{+1} = \exp(-z\bar{z})f(z)$, $\mathcal{S}_{-1} = \exp(-z\bar{z})\bar{f}(z)$. В нулевом порядке наблюдается обычная картина дифракции на амплитудном транспаранте A . Это поле не является спиральным пучком и при фокусировке в плоскости 0 не сохраняет свою структуру. На рис. 6.18, б представлено экспериментальное распределение интенсивности в порядке дифракции $+1$ на плоскости $+1$.

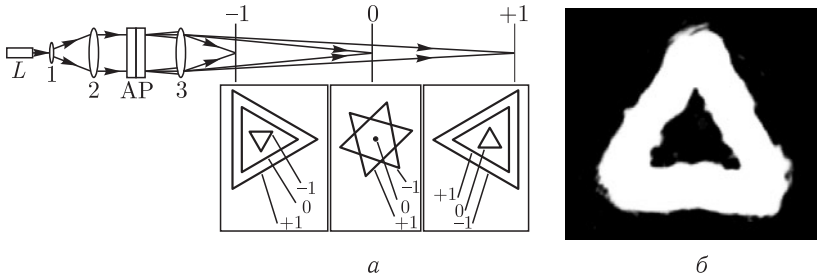


Рис. 6.18. Схема эксперимента для синтеза спирального пучка в форме границы правильного треугольника (а) и зарегистрированное распределение интенсивности в $+1$ порядке дифракции (б)

Метод астигматического преобразования. Рассмотрим теперь другой способ реализации спиральных пучков в виде кривых, основанный на использовании астигматического преобразования (3.4) пучков Эрмита-Гаусса в пучки Лагерра-Гаусса. Его частный вариант

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2}\right) \mathcal{H}_{n,0}\left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} (-2i)^n \exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4}\right) \mathcal{L}_{0,n}\left(\frac{\rho x}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho y}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

дает возможность синтеза спиральных пучков $e^{-z\bar{z}}z^n$ и может быть обобщен следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2} - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) g\left(\frac{\xi}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ = \sqrt{\pi} \rho^2 \exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4}\right) \mathcal{S}(\rho(x + iy), \rho(x - iy)). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Здесь $g(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$, и спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ имеет вид

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} + \frac{1}{8}z^2\right) \int_{\mathbb{R}} \exp(-\xi^2 - iz\xi) g(\xi) d\xi.$$

Используя преобразование (6.35), можно предложить следующую последовательность действий для экспериментального синтеза спиральных пучков:

а) сформировать световое поле $\exp(-\eta^2/\rho^2)g(\xi/\rho)$ для некоторой функции $g(\xi)$;

б) выполнить астигматическое преобразование данного поля;

в) скомпенсировать астигматизм после преобразования.

Например, для $g(\xi) = \text{rect}(\xi/a)$ реализуется спиральный пучок-«отрезок», подобный изображенному на рис. 6.18. Тогда для

$$g(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{a}\right) \sum_{n=-N}^N e^{in\omega\xi}$$

полученный спиральный пучок будет иметь вид $2N + 1$ параллельных вертикальных пучков-«отрезков»:

$$\mathcal{S}_N(z, \bar{z}) = \sum_{n=-N}^N \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} + \frac{1}{8}z^2\right) \int_{-a}^a \exp(-\xi^2 - i\xi(z - n\omega)) d\xi. \quad (6.36)$$

При $\omega \sim \omega_0 = 2\sqrt{\pi}$ отдельные пучки «слипаются», и пучок (6.36) принимает форму симметричной по x, y решетки нулей (см. рис. 6.19, а, б). Частота ω_0 получается из следующих соображений. При $a \gg 1$ и $N \rightarrow \infty$ пучок (6.36) может быть представлен в виде

$$\mathcal{S}_\infty(z, \bar{z}) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} - \frac{1}{8}z^2\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}\omega^2 n^2 + \frac{1}{2}\omega zn\right).$$

Здесь последний ряд есть тэта-функция ϑ_3 . Полагая $\omega = \omega_0$ и используя формулу Пуассона для данной тэта-функции [68]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 + 2inz) = \exp\left(-\frac{z^2}{\pi}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 + 2nz),$$

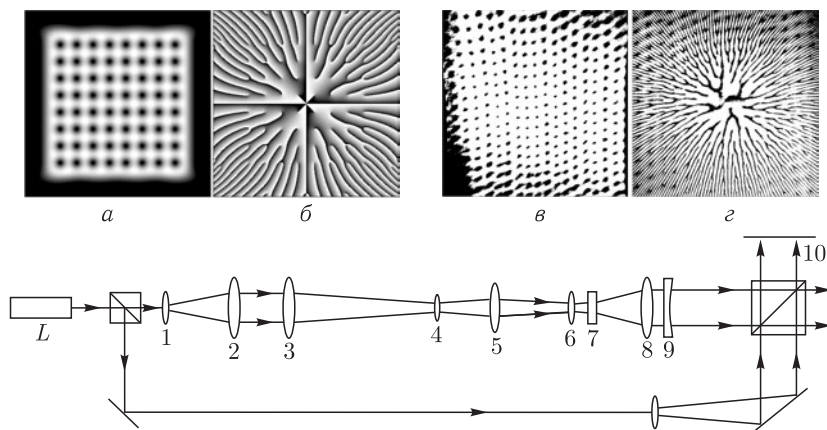


Рис. 6.19. Теоретические расчеты и экспериментальная реализация спиральных пучков в форме решетки нулей, а также оптическая схема для синтеза таких пучков. Интенсивность (а) и фаза (б) спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \boxplus_{8 \times 8})$ (теория); интенсивность (в) и результат интерференции между спиральным и опорным пучками (г) (эксперимент)

получаем симметричность и периодичность интенсивности:

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_\infty(z, \bar{z})|^2 &= |\mathcal{S}_\infty(iz, -i\bar{z})|^2 = \\ &= |\mathcal{S}_\infty(z + \omega_0, \bar{z} + \omega_0)|^2 = |\mathcal{S}_\infty(z + i\omega_0, \bar{z} - i\omega_0)|^2. \end{aligned}$$

Пучок (6.36) был реализован при помощи решетки Даммана с пространственной частотой ω_0 в качестве мультиплицирующего элемента. Схема эксперимента показана на рис. 6.19. Пучок, выходящий из лазера L , расширяется и коллимируется сферическими объективами 1, 2. Цилиндрические объективы 3, 4 сжимают пучок в одном направлении и вместе с астигматическим преобразователем, состоящим из сферического 5 и цилиндрического 6 объективов, формируют поле вида $\exp(-\eta^2/\rho^2) \text{rect}(\xi/a) \exp(2i\xi\eta/\rho^2)$. Непосредственно за цилиндрическим объективом 6 располагалась дифракционная решетка 7, дающая 17 порядков одинаковой интенсивности. За решеткой астигматическое преобразование (6.35) реализовывалось в зоне Фраунгофера, и распределение интенсивности выходного пучка выглядело как решетка нулей. Компенсация астигматизма на выходе из преобразователя осуществлялась комбинацией из длиннофокусных цилиндрических собирающей 8 и рассеивающей 9 линз. Второе плечо схемы использовалось для интерферометрической визуализации фазы спирального пучка на экране 10. При этом кривизна опорного фронта подбиралась равной кривизне пучка из преобразователя. Результаты эксперимента представлены на рис. 6.19, в, г. Как видно из рис. 6.19, г, в каждом изолированном нуле происходит ветвление интерференционной полосы, что соответствует

особенности фазы в этой точке. Во всех нулях интенсивности значения ротора вектора потока световой энергии имеют одинаковый знак (одинаковый топологический заряд). Искажение структуры вихревой решетки в эксперименте по сравнению с теоретическим распределением обусловлено наличием некоторых остаточных аберраций.

На основе астигматического преобразования возможен еще один, родственник предыдущему, способ формирования спиральных пучков. Пусть $\mathcal{S}_m(z, \bar{z})$ — пучок вида (6.24). Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2}\right) \mathcal{S}_m(\xi + i\eta, \xi - i\eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{\rho}\right)^m \exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4} - \frac{\rho^2 x^2}{8}\right) H_m\left(\frac{\rho x}{2}\right) h(y), \end{aligned} \quad (6.37)$$

где $H_m(t)$ — полином Эрмита и

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} f\left(\frac{\rho y}{2} + it\right) dt. \quad (6.38)$$

Легко видеть, что вся информация о структуре спирального пучка заложена в $h(y)$, которая является функцией одной переменной. Таким образом, эта функция осуществляет своеобразное одномерное кодирование двумерного спирального пучка.

Если в формуле (6.37) положить $m = 0$ и в качестве спирального пучка взять пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta)$ в форме кривой $\zeta(t)$, то функция h примет вид

$$\begin{aligned} h(y|\zeta) = \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) \times \\ \times \int_0^T \exp\left(-\frac{\bar{\zeta}^2(t)}{\rho^2} - \frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + y\bar{\zeta}(t) + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right) |\zeta'(t)| dt. \end{aligned}$$

В частности, для квантованной окружности получается одномерная мода Эрмита–Гаусса: $h(y|\bigcirc_n) = \exp(-\rho^2 y^2/8) H_n(\rho y/2)$.

Для синтеза спиральных пучков с помощью кодировочных функций можно предложить следующий метод:

а) синтезировать одномерный амплитудно-фазовый элемент $h(y)$;

б) осуществить «восстановление» интенсивности спирального пучка астигматическим одномерным пучком Эрмита–Гаусса

$$\exp\left(-\frac{\rho^2(x^2 + 2ixy)}{8}\right) H_m\left(\frac{\rho x}{2}\right)$$

в дальней зоне дифракции либо в Фурье-плоскости.

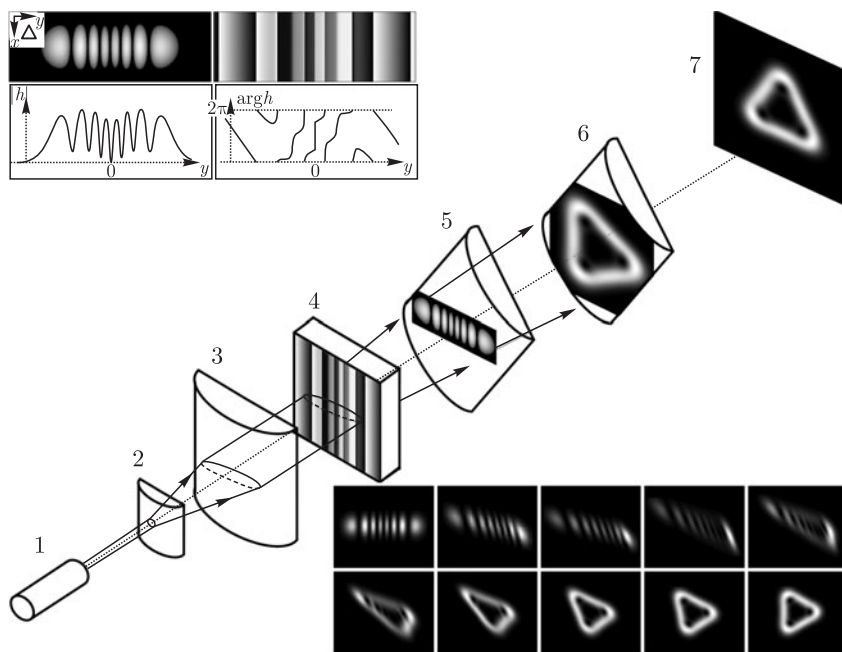


Рис. 6.20. Оптическая схема синтеза спиральных пучков посредством одномерных амплитудно-фазовых элементов (1 — лазер, 2, 3, 5, 6 — цилиндрические линзы, 4 — одномерный оптический элемент, 7 — экран). В верхней части рисунка показана структура амплитудно-фазового элемента для спирального пучка треугольной формы. Полутоновые изображения представляют амплитуду и фазу распределения $\exp(-\rho^2 x^2/8)h(y)$; графики соответствуют амплитуде и фазе функции $h(y)$. В нижней части рисунка показана динамика изменения светового поля в промежутке между линзами 5, 6. За линзой 6 пучок сохраняет свою структуру и вращается при распространении

На рис. 6.20 показан амплитудно-фазовый элемент, соответствующий спиральному пучку треугольной формы, а также оптическая схема синтеза такого пучка. Аналогичный амплитудно-фазовый элемент для спирального пучка в форме решетки нулей показан на рис. 6.21.

Следует отметить, что формулы (4.22) и (6.37) являются обобщениями основополагающего астигматического преобразования (3.4), которое, таким образом, объединяет теорию пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса с теорией спиральных пучков.

Эволюция поля $F(x, y, 0) = \exp(-\rho^2 y^2/8)h(\rho x | \zeta)$ из (6.37) при распространении имеет следующий вид:

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2i\pi l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) F(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta =$$

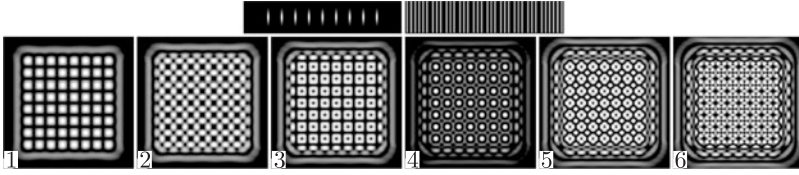


Рис. 6.21. Верхний ряд: амплитуда и фаза кодировочного элемента для спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \boxplus_{8 \times 8})$ (см. рис. 6.19). Нижний ряд: интенсивности спиральных пучков $\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \boxplus_{8 \times 8})$, построенных по формуле (6.24) при $1 \leq m \leq 6$. Как видно из рисунка, кодировочная функция для решетки нулей вещественна. Поскольку кодировочная функция для квантованной окружности также вещественна, то любой пучок в форме решетки нулей может быть получен с помощью астигматического преобразования произведения одномерных вещественных функций

$$= \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{il\rho^4(x^2 + y^2)}{32k|\sigma|^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8|\sigma|^2}\right) h\left(\frac{\rho x}{|\sigma|} \middle| \zeta e^{i \arg \sigma}\right). \quad (6.39)$$

Здесь $\sigma = 1 + \frac{il\rho^2}{4k}$. Сравнивая (6.37) и (6.39), находим, что для каждого l вышеприведенное поле $F(x, y, l)$ с точностью до масштаба и фазового множителя совпадает с астигматическим преобразованием спирального пучка $\mathcal{S}(ze^{-i \arg \sigma}, \bar{z}e^{i \arg \sigma} | \zeta)$, который получается из исходного спирального пучка поворотом на угол $\arg \sigma$.

Преобразованию (6.39) и соответствующему астигматическому преобразованию можно дать геометрическую интерпретацию. Рассмотрим трехмерное комплексное распределение (см. также [21, 58])

$$W(x, u, y) = \exp\left(-\frac{2ixu}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(x + iu, x - iu | \zeta).$$

Проекция этого распределения на плоскость $u = 0$ есть

$$W_{\text{PR}}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} W(x, u, y) du = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{2y^2}{\rho^2}\right) h\left(\frac{4x}{\rho} \middle| \zeta\right).$$

Эта проекция с точностью до масштаба совпадает с $F(x, y, 0)$. Соответственно при повороте распределения $W(x, u, y)$ на угол $\arg \sigma$ вокруг оси y его проекция на плоскость $u = 0$ с точностью до масштаба и фазового множителя совпадает с $F(x, y, l)$. Таким образом, эволюция поля $F(x, y, l)$ при распространении выглядит как изменение проекции $W(x, u, y)$ при его вращении вокруг оси y .

6.3. Угловой момент спиральных пучков

а) Теорема Штейнера. Обратимся снова к свойствам спиральных пучков и рассмотрим вопрос, как меняется угловой момент спирального

пучка при его смещении. Можно показать, что для пучков $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ имеет место оптический аналог теоремы Штейнера [69].

Теорема 3 [50, 51]. Для углового момента L_{z_0} спирального пучка, смещенного по отношению к исходному на величину z_0 , справедливо соотношение

$$L_{z_0} = L_{z_{init}} + 2|z_{init} - z_0|^2, \quad (6.40)$$

где z_{init} — координаты центра тяжести интенсивности исходного пучка:

$$z_{init} = -\frac{1}{E} \iint_{\mathbb{R}^2} (x + iy) |\mathcal{S}(z, \bar{z})|^2 dx dy.$$

Например, для смещенного гауссова пучка $L[e^{-z\bar{z}+2z\bar{z}_0-z_0\bar{z}_0}] = 2|z_0|^2$.

Доказательство. Ранее было показано, что для спирального пучка $F(z, \bar{z}) = e^{-z\bar{z}} f(z)$ плотность углового момента имеет вид

$$M = \frac{1}{2} e^{-2z\bar{z}} (z\bar{f}f_z + \bar{z}f\bar{f}_{\bar{z}}) = e^{-2z\bar{z}} \operatorname{Re}(z\bar{f}f_z).$$

Рассмотрим спиральный пучок F_{z_0} , смещенный на величину z_0 относительно исходного:

$$F_{z_0}(z, \bar{z}) = e^{-z\bar{z}+2z\bar{z}_0-z_0\bar{z}_0} f(z - z_0).$$

Находим плотность углового момента для этого пучка:

$$\begin{aligned} M_{z_0} &= e^{-2z\bar{z}-2z_0\bar{z}_0} \operatorname{Re} \left[z e^{2\bar{z}z_0} \overline{f(z-z_0)} \frac{d}{dz} \left(e^{2z\bar{z}_0} f(z-z_0) \right) \right] = \\ &= e^{-2|z|^2-2|z_0|^2} \operatorname{Re} \left[z e^{2(\bar{z}z_0+z\bar{z}_0)} \left(2\bar{z}_0 |f(z-z_0)|^2 + \overline{f(z-z_0)} f'(z-z_0) \right) \right] = \\ &= e^{-2|z-z_0|^2} |f(z-z_0)|^2 \operatorname{Re}(2z\bar{z}_0) + e^{-2|z-z_0|^2} \operatorname{Re} \left[z \overline{f(z-z_0)} f'(z-z_0) \right]. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} M_{z_0} dx dy &= 2 \operatorname{Re} \left(\bar{z}_0 \iint_{\mathbb{R}^2} z e^{-2|z-z_0|^2} |f(z-z_0)|^2 dx dy \right) + \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2|z-z_0|^2} \operatorname{Re} \left[z \overline{f(z-z_0)} f'(z-z_0) \right] dx dy = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\bar{z}_0 \iint_{\mathbb{R}^2} (z + z_0) e^{-2|z|^2} |f(z)|^2 dx dy \right) + \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2|z|^2} \operatorname{Re} \left[(z + z_0) \overline{f(z)} f'(z) \right] dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \operatorname{Re} \left(\bar{z}_0 \iint_{\mathbb{R}^2} z e^{-2|z|^2} |f(z)|^2 dx dy \right) + 2|z_0|^2 E + \\
&+ \iint_{\mathbb{R}^2} M dx dy + \operatorname{Re} \left(z_0 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2|z|^2} \overline{f(z)} f'(z) dx dy \right).
\end{aligned}$$

Для вычисления последнего слагаемого заметим, что

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(e^{-2z\bar{z}} f(z) \overline{f(z)} \right) dx dy = \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} (-2z) e^{-2|z|^2} |f(z)|^2 dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2|z|^2} f(z) \overline{f'(z)} dx dy.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
2 \iint_{\mathbb{R}^2} z e^{-2|z|^2} |f(z)|^2 dx dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2|z|^2} f(z) \overline{f'(z)} dx dy \Rightarrow \\
2 \operatorname{Re} \left(\bar{z}_0 \iint_{\mathbb{R}^2} z e^{-2|z|^2} |f(z)|^2 dx dy \right) &= \operatorname{Re} \left(\bar{z}_0 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2|z|^2} f(z) \overline{f'(z)} dx dy \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(z_0 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2|z|^2} \overline{f(z)} f'(z) dx dy \right)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} M_{z_0} dx dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} M dx dy + 2|z_0|^2 E + \\
&+ 4 \operatorname{Re} \left(\bar{z}_0 \iint_{\mathbb{R}^2} z e^{-2|z|^2} |f(z)|^2 dx dy \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$L_{z_0} = L + 2|z_0|^2 + \frac{4}{E} \operatorname{Re} \left(\bar{z}_0 \iint_{\mathbb{R}^2} z |F(z, \bar{z})|^2 dx dy \right).$$

Введем в рассмотрение точку (центр тяжести интенсивности спирального пучка со знаком минус)

$$z_{init} = -\frac{1}{E} \iint_{\mathbb{R}^2} z |F(z, \bar{z})|^2 dx dy.$$

Тогда полученное равенство, связывающее полные угловые моменты спиральных пучков, можно переписать в виде

$$L_{z_0} = L + 2|z_0|^2 - 4 \operatorname{Re}(\bar{z}_0 z_{init}).$$

Подставим вместо z_0 в данное равенство z_{init} :

$$L_{z_{init}} = L - 2|z_{init}|^2.$$

Вычитая из одного равенства другое, находим

$$L_{z_0} = L_{z_{init}} + 2|z_0|^2 - 4 \operatorname{Re}(\bar{z}_0 z_{init}) + 2|z_{init}|^2 = L_{z_{init}} + 2|z_0 - z_{init}|^2,$$

и тем самым теорема доказана. \square

Теорема 4. Угловой момент и ротор потока световой энергии связаны соотношением

$$L = \frac{k}{2E} \iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) \operatorname{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) dx dy.$$

Для доказательства достаточно взять циркуляцию векторного поля $(x^2 + y^2)I\nabla\phi$ и применить формулу Грина.

б) полный угловой момент спирального пучка $\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | f)$. Рассмотрим вопрос нахождения полного углового момента для спирального пучка вида

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | f) = e^{-z\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} - 2\bar{z} \right)^m f(z) = e^{-z\bar{z}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (-2\bar{z})^{m-l} f^{(l)}(z).$$

Перепишем представление плотности углового момента $M(x, y)$ в комплексной форме:

$$\begin{aligned} M &= \frac{x(\bar{F}F_y - F\bar{F}_y) - y(\bar{F}F_x - F\bar{F}_x)}{2i} = \\ &= \frac{\bar{F}(xF_y - yF_x) - F(x\bar{F}_y - y\bar{F}_x)}{2i} = \\ &= \frac{\bar{F}(izF_z - i\bar{z}F_{\bar{z}}) - F(iz\bar{F}_z - i\bar{z}\bar{F}_{\bar{z}})}{2i} = \\ &= \frac{z(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z) + \bar{z}(F\bar{F}_{\bar{z}} - \bar{F}F_{\bar{z}})}{2}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Подставляя в полученную формулу вместо F выражение для спирального пучка \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} F(z, \bar{z}) &= e^{-z\bar{z}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (-2\bar{z})^{m-l} f^{(l)}(z), \\ \bar{F}(z, \bar{z}) &= e^{-z\bar{z}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-2z)^{m-k} \overline{f^{(k)}(z)}, \end{aligned}$$

получаем

$$2M = -e^{-2z\bar{z}} \sum_{l,k=0}^m \binom{m}{l} \binom{m}{k} (-2z)^{m-k} (-2\bar{z})^{m-l} \times \\ \times \left[(m-l)f^{(l)}(z)\overline{f^{(k)}(z)} - \bar{z}f^{(l)}(z)\overline{f^{(k+1)}(z)} + \right. \\ \left. + (m-k)f^{(l)}(z)\overline{f^{(k)}(z)} - zf^{(l+1)}(z)\overline{f^{(k)}(z)} \right]. \quad (6.42)$$

Будем считать, что целая аналитическая функция $f(z)$ задается своим разложением в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Тогда

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{n!}{(n-l)!} a_n z^{n-l},$$

и выражение в квадратных скобках в формуле (6.42) принимает вид

$$[\dots] = \sum_{n_1=l}^{\infty} \sum_{n_2=k}^{\infty} \frac{n_1!}{(n_1-l)!} \frac{n_2!}{(n_2-k)!} (2m-n_1-n_2) a_{n_1} \bar{a}_{n_2} z^{n_1-l} \bar{z}^{n_2-k}.$$

Итак,

$$2M = -e^{-2z\bar{z}} \sum_{l,k=0}^m \binom{m}{l} \binom{m}{k} (-2)^{2m-l-k} z^{m-k} \bar{z}^{m-l} \times \\ \times \sum_{n_1=l}^{\infty} \sum_{n_2=k}^{\infty} \frac{n_1! n_2!}{(n_1-l)! (n_2-k)!} (2m-n_1-n_2) a_{n_1} \bar{a}_{n_2} z^{n_1-l} \bar{z}^{n_2-k}.$$

Так как

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2z\bar{z}} z^{m+n_1-l-k} \bar{z}^{m+n_2-l-k} dx dy = \\ = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\alpha r e^{-2r^2} r^{2m+n_1+n_2-2l-2k} e^{i\alpha(n_1-n_2)} = \\ = \begin{cases} \pi \frac{(m+n-l-k)!}{2^{m+n-l-k+1}}, & (n_1 = n_2 = n), \\ 0, & (n_1 \neq n_2), \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} M dx dy &= - \sum_{l,k=0}^m \binom{m}{l} \binom{m}{k} (-2)^{2m-l-k} \times \\
 &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^2 (m-n) a_n \bar{a}_n}{(n-l)! (n-k)!} \pi \frac{(m+n-l-k)!}{2^{m+n-l-k+1}} = \\
 &= -\frac{\pi}{2} \cdot 2^m \sum_{l,k=0}^m (-1)^{l+k} \binom{m}{l} \binom{m}{k} \times \\
 &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (m-n) \frac{n!^2 (m+n-l-k)!}{(n-l)! (n-k)!} \frac{|a_n|^2}{2^n} = \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot 2^m \sum_{n=0}^{\infty} (n-m) \frac{|a_n|^2}{2^n} T_{nm},
 \end{aligned}$$

где целочисленные коэффициенты T_{nm} имеют вид

$$T_{nm} = \sum_{l,k=0}^{\min(m,n)} (-1)^{l+k} \binom{m}{l} \binom{m}{k} \binom{n}{l} \binom{n}{k} l! k! (m+n-l-k)!.$$

Используя равенство [36, стр. 633, (4.2.10.3)]

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k} \binom{a}{k}}{\binom{b}{k}} = \frac{\binom{b-a}{n}}{\binom{b}{n}}, \quad ^1)$$

вычисляем коэффициенты T_{nm} :

$$\begin{aligned}
 T_{nm} &= \sum_{l=0}^{\min(m,n)} (-1)^l \binom{m}{l} \binom{n}{l} l! (m+n-l)! \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (-1)^k \frac{\binom{m}{k} \binom{n}{k}}{\binom{m+n-l}{k}} = \\
 &= \sum_{l=0}^{\min(m,n)} (-1)^l \binom{m}{l} \binom{n}{l} l! (m+n-l)! \frac{\binom{n-l}{n}}{\binom{m+n-l}{n}} = \\
 &= \left| \begin{array}{c} \text{оставляем только} \\ \text{член } l=0 \end{array} \right| = \frac{(m+n)!}{\binom{m+n}{n}} = n! m!.
 \end{aligned}$$

¹⁾ Хочется отметить еще раз, что биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ равен нулю, если $n < k$. Как следствие, левая часть приведенной формулы обращается в нуль, если $b - a < n$.

Таким образом,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} M dx dy = \frac{\pi}{2} \cdot 2^m m! \sum_{n=0}^{\infty} (n-m) \frac{n! |a_n|^2}{2^n},$$

Для нахождения полного углового момента

$$L = \frac{1}{E} \iint_{\mathbb{R}^2} M dx dy$$

осталось найти энергию спирального пучка.

Поскольку

$$\begin{aligned} F\bar{F} &= e^{-2z\bar{z}} \sum_{l,k=0}^m \binom{m}{l} \binom{m}{k} (-2)^{2m-l-k} z^{m-k} \bar{z}^{m-l} f^{(l)}(z) \overline{f^{(k)}(z)} = \\ &= e^{-2z\bar{z}} \sum_{l,k=0}^m \binom{m}{l} \binom{m}{k} (-2)^{2m-l-k} \times \\ &\quad \times \sum_{n_1=l}^{\infty} \sum_{n_2=k}^{\infty} \frac{n_1! n_2! a_{n_1} \bar{a}_{n_2}}{(n_1-l)! (n_2-k)!} z^{m+n_1-l-k} \bar{z}^{m+n_2-l-k}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |F|^2 dx dy &= \sum_{l,k=0}^m \binom{m}{l} \binom{m}{k} (-2)^{2m-l-k} \times \\ &\times \sum_{n_1=l}^{\infty} \sum_{n_2=k}^{\infty} \frac{n_1! n_2! a_{n_1} \bar{a}_{n_2}}{(n_1-l)! (n_2-k)!} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2z\bar{z}} z^{m+n_1-l-k} \bar{z}^{m+n_2-l-k} dx dy = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{l,k=0}^m \binom{m}{l} \binom{m}{k} (-2)^{2m-l-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^2 |a_n|^2}{(n-l)! (n-k)!} \frac{(m+n-l-k)!}{2^{m+n-l-k}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2^n} T_{nm} = \frac{\pi}{2} \cdot 2^m m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! |a_n|^2}{2^n}, \end{aligned}$$

и окончательно находим

$$L = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n-m) \frac{n! |a_n|^2}{2^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! |a_n|^2}{2^n}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{n! |a_n|^2}{2^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! |a_n|^2}{2^n}} - m. \quad (6.43)$$

Как следствие, получаем, что если L_0 — полный угловой момент спирального пучка

$$\mathcal{S}_0(z, \bar{z} | f) = e^{-z\bar{z}} f(z) = e^{-z\bar{z}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

то $L_m = L_0 - m$ — полный угловой момент спирального пучка

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | f) = e^{-z\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} - 2\bar{z} \right)^m f(z).$$

Пример 1. Пусть $f(z) = e^{az}$. Тогда $a_n = \frac{a^n}{n!}$ и

$$L_m = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a^{2n}}{2^n n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2^n n!}} - m = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2/2)^{n-1}}{(n-1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2/2)^n}{n!}} - m = \frac{a^2}{2} - m.$$

В частности, для смещенного гауссова пучка $\mathcal{S}_{z_0}(z, \bar{z}) = e^{-z\bar{z} + 2z\bar{z}_0 - z_0\bar{z}_0}$ получаем $L = 2|z_0|^2 - m$.

Пример 2. Пусть $f(z) = z^N$. Тогда $a_n = \delta_{nN}$ и $L = N - m$ — полный угловой момент спирального пучка $\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \bigcirc_N)$.

в) полный угловой момент спирального пучка, построенного по порождающей кривой. Рассмотрим теперь задачу нахождения полного углового момента спирального пучка, построенного по некоторой плоской кривой $\zeta(t)$, $t \in [0, T)$. Определим оператор

$$\mathfrak{F}_{\zeta(t)}[\bullet] = \int_0^T \exp \left(-\zeta(t)\bar{\zeta}(t) + \int_0^t (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau \right) [\bullet] |\zeta'(t)| dt. \quad (6.44)$$

Тогда спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta)$ может быть представлен в виде

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta) = e^{-z\bar{z}} \mathfrak{F}_{\zeta(t)} e^{2z\bar{\zeta}(t)}.$$

Вычисляем плотность углового момента в терминах оператора \mathfrak{F}_{ζ} — сначала полагаем $m = 0$ в формуле (6.42), затем подставляем явное представление функции $f(z) = \mathfrak{F}_{\zeta(t)} e^{2z\bar{\zeta}(t)}$:

$$\begin{aligned} 2M &= e^{-2z\bar{z}} [\bar{z} f(z) \overline{f'(z)} + z f'(z) \overline{f(z)}] = \\ &= e^{-2z\bar{z}} [\bar{z} \mathfrak{F}_{\zeta(t)} e^{2z\bar{\zeta}(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} 2\zeta(s) e^{2\bar{z}\zeta(s)} + z \mathfrak{F}_{\zeta(t)} 2\bar{\zeta}(t) e^{2z\bar{\zeta}(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} e^{2\bar{z}\zeta(s)}] = \\ &= 2\mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} [\bar{z}\zeta(s) + z\bar{\zeta}(t)] e^{-2z\bar{z} + 2z\bar{\zeta}(t) + 2\bar{z}\zeta(s)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$L = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} M dx dy}{\iint_{\mathbb{R}^2} I dx dy} = \frac{\mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} \iint_{\mathbb{R}^2} [\bar{z}\zeta(s) + z\bar{\zeta}(t)] e^{-2z\bar{z}+2z\bar{\zeta}(t)+2\bar{z}\zeta(s)} dx dy}{\mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2z\bar{z}+2z\bar{\zeta}(t)+2\bar{z}\zeta(s)} dx dy}.$$

Используем вспомогательные интегралы:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2z\bar{z}+2Az+2B\bar{z}} dx dy &= \frac{\pi}{2} e^{2AB}, \\ \iint_{\mathbb{R}^2} (zA + \bar{z}B) e^{-2z\bar{z}+2Az+2B\bar{z}} dx dy &= \pi AB e^{2AB} \end{aligned}$$

и получаем

$$L = \frac{\mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} [2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)e^{2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)}]}{\mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} [e^{2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)}]}. \quad (6.45)$$

Пример 1. Для окружности $\zeta(t) = \sqrt{\frac{\nu}{2}} e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, оператор (6.45) принимает следующий вид:

$$\mathfrak{F}_{\zeta(t)}[\bullet] = \sqrt{\frac{\nu}{2}} e^{-\nu/2} \int_0^{2\pi} e^{i\nu t} [\bullet] dt.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} [e^{2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)}] &= \frac{\nu e^{-\nu}}{2} \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} ds e^{i\nu(t-s)} \cdot e^{\nu e^{-it} e^{is}} = \\ &= \frac{\nu e^{-\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} ds e^{i(\nu-k)(t-s)} = \frac{\nu e^{-\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \left| \int_0^{2\pi} e^{i(\nu-k)t} dt \right|^2 = \\ &= \frac{\nu e^{-\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \left[2 \frac{\sin(\nu-k)\pi}{\nu-k} \right]^2 = 2\nu e^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\nu-k)\pi}{\nu-k} \right]^2 \frac{\nu^k}{k!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} [2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)e^{2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)}] &= \\
&= \frac{\nu e^{-\nu}}{2} \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} ds e^{i\nu(t-s)} \cdot e^{\nu e^{-it} e^{is}} \cdot \nu e^{-it+is} = \\
&= \frac{\nu^2 e^{-\nu}}{2} \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} ds e^{i(\nu-1)(t-s) + \nu e^{-i(t-s)}} = \\
&= \frac{\nu^2 e^{-\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} ds e^{i(\nu-k-1)(t-s)} = \\
&= \frac{\nu e^{-\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \left| \int_0^{2\pi} e^{i(\nu-k-1)t} dt \right|^2 = \\
&= \frac{\nu^2 e^{-\nu}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \left[2 \frac{\sin(\nu-k-1)\pi}{\nu-k-1} \right]^2 = 2\nu^2 e^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\nu-k-1)\pi}{\nu-k-1} \right]^2 \frac{\nu^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$L = \nu \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\nu-k-1)\pi}{\nu-k-1} \right]^2 \frac{\nu^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\nu-k)\pi}{\nu-k} \right]^2 \frac{\nu^k}{k!}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k \left[\frac{\sin(\nu-k)\pi}{\nu-k} \right]^2 \frac{\nu^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\nu-k)\pi}{\nu-k} \right]^2 \frac{\nu^k}{k!}}. \quad (6.46)$$

В частности, для N -квантованной окружности ($\nu = N$) только слагаемое $k = N$ отлично от нуля, поэтому для квантованного спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \bigcirc_N)$ получаем уже известный результат: $L = N$.

С помощью асимптотических методов можно доказать другой результат, тем не менее также имеющий отношение к полному угловому моменту квантованных спиральных пучков в форме окружности. А именно, если построить правильный n -угольник, то при $n \rightarrow \infty$ полный угловой момент соответствующего N -квантованного спирального пучка будет равен

$$L = N - \frac{N}{3} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 + \frac{N^2}{9} \left(\frac{\pi}{n} \right)^4 - \dots$$

Пример 2. С помощью формулы (6.45) вычислим асимптотику полного углового момента пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{\nu} \zeta_1)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Будем считать, что ζ_1 — некоторая 1-квантованная кривая без самопересечений.

Сначала вычислим интеграл от интенсивности:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y) dx dy &= \mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} [e^{2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)}] = \nu \int_0^T |\zeta'(t)| dt \int_0^T |\zeta'(s)| ds \times \\
 &\times \exp \left(-\nu \left[\zeta_1(t) \bar{\zeta}_1(t) + \zeta_1(s) \bar{\zeta}_1(s) - 2\bar{\zeta}_1(t) \zeta_1(s) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\int_0^t - \int_0^s \right) (\bar{\zeta}_1(\tau) \zeta_1'(\tau) - \zeta_1(\tau) \bar{\zeta}_1'(\tau)) d\tau \right] \right) = \\
 &= \nu \int_0^T |\zeta_1'(t)| dt \int_0^T e^{-\nu P(s,t)} |\zeta_1'(s)| ds.
 \end{aligned}$$

Ищем стационарные точки функции $P(s, t)$ по s :

$$P'_s = 2\zeta_1'(s) [\overline{\zeta_1(s)} - \zeta_1(t)] = 0.$$

В силу отсутствия особых точек и точек самопересечений у кривой ζ_1 получаем единственное решение $s = t$. При этом $P(s = t, t) = 0$ и $P''(s = t, t) = 2|\zeta_1(t)|^2$. Используя известный результат

$$\int_{\mathcal{U}(x_0)} e^{-\nu P(x)} f(x) dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\nu P''(x_0)}} e^{-\nu P(x_0)} f(x_0),$$

находим асимптотику энергии:

$$E = \iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y) dx dy \sim \sqrt{\pi\nu} \int_0^T |\zeta_1'(t)| dt.$$

Таким образом, энергия спирального пучка асимптотически эквивалентна произведению $\sqrt{\pi}$ на длину порождающей кривой.

Вычислим теперь интеграл от плотности углового момента:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} M(x, y) dx dy &= \mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\bar{\zeta}(s)} [2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)e^{2\bar{\zeta}(t)\zeta(s)}] = \\
 &= 2\nu^2 \int_0^T \bar{\zeta}_1(t) |\zeta_1'(t)| dt \int_0^T e^{-\nu P(s,t)} \zeta_1(s) |\zeta_1'(s)| ds = \\
 &\sim 2\nu \sqrt{\pi\nu} \int_0^T |\zeta_1(t)|^2 |\zeta_1'(t)| dt.
 \end{aligned}$$

В данном случае получившийся интеграл — это момент инерции кривой ζ_1 относительно точки $(0, 0)$.

Окончательно получаем, что

$$L \sim 2\nu \frac{\int_0^T |\zeta_1(t)|^2 |\zeta_1'(t)| dt}{\int_0^T |\zeta_1'(t)| dt}.$$

В частности, для окружности

$$\bigcirc_\nu(t) = \sqrt{\frac{\nu}{2}} e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi) \quad \Rightarrow \quad |\zeta_1(t)|^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L \sim \nu.$$

г) метрические свойства спиральных пучков и кодировочных функций. Использование введенного выше оператора (6.44) позволяет довольно легко доказать ряд интегральных соотношений между спиральными пучками и их кодировочными функциями.

Пусть $\zeta(t)$ и $\vartheta(t)$ — некоторые плоские кривые. Тогда

1. $\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta) \overline{\mathcal{S}}(z, \bar{z} | \vartheta) dx dy = \frac{\pi}{2} \mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\overline{\vartheta}(s)} e^{2\bar{\zeta}(t)\vartheta(s)};$
2. $\int_{\mathbb{R}} h(x | \zeta) \overline{h}(x | \vartheta) dx = 2\sqrt{\pi} \mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\overline{\vartheta}(s)} e^{2\bar{\zeta}(t)\vartheta(s)};$
3. $\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \zeta) \overline{\mathcal{S}}_m(z, \bar{z} | \vartheta) dx dy = \pi 2^{m-1} m! \mathfrak{F}_{\zeta(t)} \mathfrak{F}_{\overline{\vartheta}(s)} e^{2\bar{\zeta}(t)\vartheta(s)};$
4. $\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}_{m_1}(z, \bar{z} | \zeta) \overline{\mathcal{S}}_{m_2}(z, \bar{z} | \vartheta) dx dy = 0$, если $m_1 \neq m_2$.

Объединяя эти свойства воедино при помощи скалярных произведений в пространствах $L_2(\mathbb{R}^2)$ и $L_2(\mathbb{R})$, получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_m(\bullet | \zeta), \mathcal{S}_m(\bullet | \vartheta))_{L_2(\mathbb{R}^2)} &= 2^m m! (\mathcal{S}(\bullet | \zeta), \mathcal{S}(\bullet | \vartheta))_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \\ (\mathcal{S}(\bullet | \zeta), \mathcal{S}(\bullet | \vartheta))_{L_2(\mathbb{R}^2)} &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} (h(x | \zeta), h(x | \vartheta))_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Следовательно, если спиральные пучки ортогональны, то кодировочные функции также ортогональны, и наоборот. Полученные формулы остаются справедливыми и при выборе одной и той же кривой: $\zeta = \vartheta$.

В заключение отметим, что довольно часто знак углового момента связывают с направлением вращения поля при распространении.

На самом деле эти характеристики никак не связаны, и физическая картина возникновения углового момента является иной. Приведем сначала характерный пример. Рассмотрим две линейных комбинации пучков Лагерра–Гаусса:

$$F_1(x, y) = a\mathcal{L}_{0,0}(x, y) + b\mathcal{L}_{0,1}(x, y)$$

и

$$F_2(x, y) = a\mathcal{L}_{1,0}(x, y) + b\mathcal{L}_{0,1}(x, y).$$

Легко показать, что при распространении они вращаются в разные стороны: параметр вращения для поля $F_1(x, y)$ равен $\theta_0 = -1$, а для поля $F_2(x, y)$ равен $\theta_0 = +1$, тогда как их угловые моменты совпадают и равны

$$L = \frac{|b|^2}{2|a|^2 + |b|^2}.$$

Для понимания этого факта, удобно рассмотреть в сравнении поля действительного и комплексного ЛГ-пучков. В реальности, конечно, любое световое поле является вещественным, однако, для упомянутых пучков Лагерра–Гаусса физическая картина поля, конечно, различна. Чтобы это выявить, необходимо рассматривать полное вещественное поле в обоих случаях с учетом их временной составляющей. Тогда для двух ЛГ-пучков, например $\text{Re}\mathcal{L}_{0,1}$ и $\mathcal{L}_{0,1}$, получим

$$\begin{aligned}\text{Re}(e^{-r^2} r \cos \phi \cdot e^{-i\omega t}) &= e^{-r^2} r \cos \phi \cdot \cos \omega t, \\ \text{Re}(e^{-r^2} r e^{i\phi} \cdot e^{-i\omega t}) &= e^{-r^2} r \cos(\phi - \omega t).\end{aligned}$$

Как видно из их сравнения, поле во втором случае в заданной плоскости вращается с оптической частотой, а его усреднение по времени дает кольцевую структуру. Именно направление этого вращения и определяет знак углового момента.

Глава 7

СИНТЕЗ ФАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В данной главе рассматриваются возможности применения спиральных пучков света к задачам фокусировки лазерного излучения.

7.1. Задача фокусировки лазерного излучения в плоские кривые

Задача синтеза фазовых элементов для формирования световых полей с заданным распределением интенсивности (фокусаторов) известна и имеет уже свою историю и библиографию (см., например, [70–72]). В математическом плане задача фокусировки лазерного излучения сводится к нахождению некоторой кусочно-гладкой фазовой функции $\exp(i\phi(\xi, \eta))$, преобразование Френеля которой при $l = l_0$ дает требуемое распределение интенсивности $I(x, y)$:

$$I(x, y) = \left| \frac{k}{2\pi i l_0} \iint_{\Omega} \exp\left(\frac{ik}{2l_0}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) e^{i\phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta \right|^2. \quad (7.1)$$

Здесь Ω — апертура оптического элемента.

Необходимо также отметить, что выражение «требуемое распределение интенсивности $I(x, y)$ » нужно понимать не в смысле аналитического представления функции I , а несколько шире. Так, например, очевидно, что при $I(x, y) = \text{rect}(x/a) \text{rect}(y/b)$ задача фокусировки (7.1) не имеет решений ни при каких положительных a и b , поскольку для любого поля конечных размеров интенсивность $I(x, y)$ является целой аналитической функцией по обоим переменным. Тем не менее задача фокусировки в прямоугольник с соотношением сторон a/b является одной из самых распространенных [70, 73].

В связи с этим при фокусировке лазерного излучения в кривую L (другой широко рассматриваемый случай — двумерная область) предполагается, что распределение интенсивности $I(x, y)$ должно быть максимально в точках кривой L или некоторой ее ε -окрестности (размер ε много меньше длины L), а совокупная доля энергии в этой окрестности как можно ближе к 100 %. Кроме того, более или менее однородное распределение интенсивности на кривой L является еще одним важным моментом, который должен учитываться при решении задачи.

Суммируя все вышесказанное, можно считать, что задача фокусировки лазерного излучения в некоторую кривую L решена, если в результате фокусировки элементом $\exp(i\phi(\xi, \eta))$ интенсивность $I(x, y)$ на плоскости $l = l_0$ визуальна похожа на саму кривую L . Количественные показатели — доля энергии $\iint_{L_\varepsilon} I dx dy / \iint_{\mathbb{R}^2} I dx dy$ (L_ε — ε -окрестность кривой L) и степень неоднородности $1 - \min_L I / \max_L I$ — характеризуют точность этого визуального сходства.

Одним из основных методов решения задач фокусировки для различных кривых L является метод стационарной фазы (в предположении $k(\text{diam } \Omega)^2 \gg 2l_0$). Применение этого метода позволяет рассматривать задачу поиска $\phi(\xi, \eta)$ как процесс отображения области Ω в исходной плоскости на кривую L в плоскости $l = l_0$, причем каждая точка $(x, y) \in L$ имеет бесконечное число прообразов в области Ω . При таком рассмотрении в оптике кривая L называется *каустикой*, а само исследование — *геометро-оптическим* подходом к задаче фокусировки. Строгая математическая постановка задачи фокусировки в кривую и ее подробное исследование в рамках геометрической оптики проведены в [74, 75]. Подход, основанный на методе стационарной фазы, в силу специфики задачи не дает начальных условий, поэтому решение задачи принципиально не является однозначным. Выбор отображения существенно сказывается на виде решения $\phi(\xi, \eta)$ и, как следствие, на форме интенсивности $I(x, y)$. Это вызвано тем, что на этапе построения решений $\phi(\xi, \eta)$ за пределами рассмотрения оказываются волновые свойства формируемых полей.

Система уравнений на стационарные точки для преобразования Френеля (7.1) имеет вид

$$x = \xi + \frac{l_0}{k} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, \eta), \quad y = \eta + \frac{l_0}{k} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\xi, \eta), \quad (7.2)$$

где $\{x = x(t), y = y(t), t \in [0, T]\}$ — параметрическая запись кривой L . Отсутствие начальных условий для системы (7.2) позволяет строить различные отображения $\Omega \rightarrow L$ (некоторые из них показаны на рис. 7.1). Выбор отображения $\Omega \rightarrow L$ не связан никакими ограничениями, кроме требования, чтобы оно было сюръективно (отображение «на»). Тем не менее, задание отображения существенно сказывается на виде решения $\phi(\xi, \eta)$ и, как следствие, на форме интенсивности $I(x, y)$. Например, выбор отображения, указанного на рис. 7.1а, не может гарантировать одинаково качественный результат для произвольной кривой L . Поэтому построение отображения $\Omega \rightarrow L$ для каждой конкретной задачи фокусировки превращается в своего рода «угадывание», когда используются различные привходящие обстоятельства: выбор области Ω специального вида, симметрия кривой L , свойства преобразования Френеля для различных начальных распределений. Подобные соображения, учитывающие конкретику задачи, способны привести

к весьма хорошим результатам, хотя и не могут быть обобщены на произвольный случай.

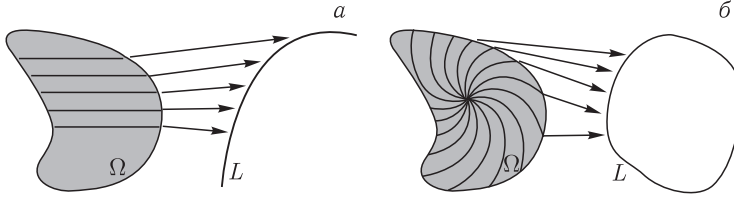


Рис. 7.1. Варианты отображений $\Omega \rightarrow L$: *а* — отображение, переводящее горизонтальные хорды области Ω в последовательные точки кривой L , *б* — отображение, переводящее спиралевидные дуги области Ω в точки замкнутой кривой L

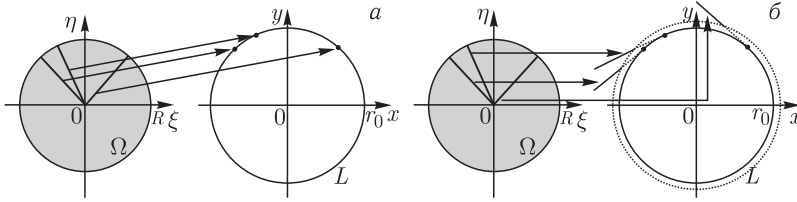


Рис. 7.2. *а* — отображение $\Omega \rightarrow L$ (круга в окружность), переводящее радиальные отрезки в точки, *б* — отображение $\Omega \rightarrow (x, y)$, переводящее радиальные отрезки в лучи касательных к L

В качестве простого примера, допускающего аналитическое исследование, рассмотрим задачу фокусировки в окружности. Введем полярные переменные: $\xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$, $x + iy = r e^{i\alpha}$. Пусть

$$\Omega = \{(\xi, \eta) : \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq R\} \text{ — круг радиуса } R,$$

$$L = \{(x, y) : r = \sqrt{x^2 + y^2} = r_0\} \text{ — окружность радиуса } r_0.$$

Тогда уравнение для функции $\phi(\xi, \eta)$ с учетом (7.2) примет вид

$$\left(\xi + \frac{l_0}{k} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\eta + \frac{l_0}{k} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 = r_0^2. \quad (7.3)$$

Если предположить, что фаза $\phi(\xi, \eta)$ обладает радиальной симметрией (т.е. отображение $\Omega \rightarrow L$ выбрано таким, как показано на рис. 7.2, *а*), то из (7.3) получается известное решение «сферическая линза + круговой аксикон» [76]:

$$\phi_0(\rho) = -\frac{k\rho^2}{2l_0} \pm \frac{kr_0\rho}{l_0}. \quad (7.4)$$

Аддитивная константа не играет роли и опущена для простоты. В дальнейшем будем рассматривать только решение (7.4) со зна-

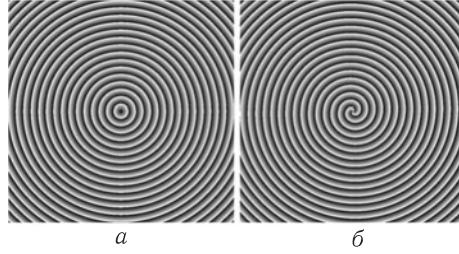


Рис. 7.3. Линии уровня фазовых элементов $\phi_0(\rho)$ (а) и $\phi_2(\rho)$ (б) без квадратичного слагаемого

ком «+». Линии уровня функции $\phi_0(\rho)$ без квадратичного слагаемого $k\rho^2/2l$ показаны на рис. 7.3, а. Подставляя (7.4) в (7.2), получаем отображение $\Omega \rightarrow L$ в аналитическом виде:

$$\begin{cases} x = \xi + \frac{l_0}{k} \left(-\frac{k\xi}{l_0} + \frac{kr_0}{l_0} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) = r_0 \cos \theta, \\ y = \eta + \frac{l_0}{k} \left(-\frac{k\eta}{l_0} + \frac{kr_0}{l_0} \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) = r_0 \sin \theta. \end{cases} \quad (7.5)$$

Соответствующее функции $\phi_0(\rho)$ световое поле $F(x, y)$ обладает радиальной симметрией, нулевым ротором $\text{rot}_0 \mathbf{j}$ и имеет вид

$$F_0(r) = \frac{k}{il_0} \exp \left(\frac{ikr^2}{2l_0} \right) \int_0^R \exp \left(\frac{ikr_0\rho}{l_0} \right) J_0 \left(\frac{kr\rho}{l_0} \right) \rho d\rho. \quad (7.6)$$

Зависимость $I_0(r) = |F_0(r)|^2$ от r показана на рис. 7.4 ($m = 0$). Появление локального максимума интенсивности в центре обусловлено различием между геометро-оптическим приближением (т.е. асимптотическим разложением по методу стационарной фазы) и реальным интегральным представлением (7.1).

Рассмотрим теперь структуру функции $I_0(r)$ в центре кольца. Как видно из (7.6) не только интенсивность, но и само поле $F_0(r)$ обладает радиальной симметрией, следовательно $\text{rot}_0 \mathbf{j} \equiv 0$ для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

С другой стороны, как было показано ранее, поле в окрестности изолированного нуля имеет вихревой характер, а фаза должна иметь особенность вида $\arg(x + iy) = \alpha$. Таким образом, для достижения нулевой интенсивности в центре кольца на плоскости $l = l_0$ и сохранения радиальной интенсивности требуется изменить соответствующим образом фазу $\phi(\xi, \eta)$ в начальной плоскости. Для этого воспользуемся следующим свойством [77–79]:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi + y\eta)} f(\xi^2 + \eta^2) e^{im \arg(\xi + i\eta)} d\xi d\eta = F(x^2 + y^2) (x + iy)^m. \quad (7.7)$$

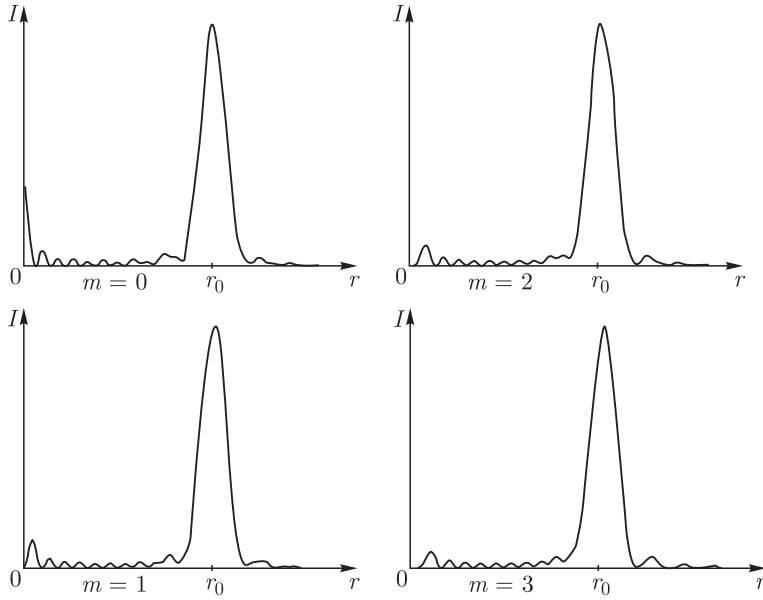


Рис. 7.4. Графики зависимости интенсивности $I_m(r)$ от r при $m = 0, 1, 2, 3$

Как видно из (7.7), преобразование Фурье сохраняет радиально симметричный вид интенсивности при трансформации исходного поля и обеспечивает требуемую особенность фазы в центре. При этом поле вектора \mathbf{j} становится вихревым: $\text{rot}_0 \mathbf{j} \neq 0$.

Рассмотрим конкретный набор фазовых функций [5, 80], удовлетворяющих равенству (7.7):

$$\phi_m(\rho, \theta) = -\frac{k\rho^2}{2l_0} \pm \frac{kr_0\rho}{l_0} + m\theta, \quad (7.8)$$

где m — целое число, отличное от нуля. Линии уровня функции $\phi_2(\rho, \theta)$ без квадратичного слагаемого $k\rho^2/2l$ показаны на рис. 7.3, б. Соответствующее световое поле $F(x, y)$ имеет вид

$$F_m(r, \alpha) = \frac{k}{i^{m+1}l_0} \exp\left(im\alpha + \frac{ikr^2}{2l_0}\right) \int_0^R \exp\left(\frac{ikr_0\rho}{l_0}\right) J_m\left(\frac{kr\rho}{l_0}\right) \rho d\rho. \quad (7.9)$$

Зависимости $I_m(r) = |F_m(r, \alpha)|^2$ от r при $m = 1, 2, 3$ показаны на рис. 7.4. Наличие слагаемого $m\theta$ в (7.8) порождает нуль m -го порядка в точке $x=y=0$ поля $F_m(r, \alpha)$. Локальный пик интенсивности в центре при $m=0$ разваливается на локальное кольцо при $m \neq 0$, которое все

более уплощается с ростом m . Отображение $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$, задаваемое функцией (7.8), имеет вид

$$\begin{cases} x = r_0 \cos \theta - \frac{ml_0}{k\rho} \sin \theta, \\ y = r_0 \sin \theta + \frac{ml_0}{k\rho} \cos \theta. \end{cases} \quad (7.10)$$

Невырожденность отображения говорит о том, что никакой фокусировки в смысле метода стационарной фазы не происходит. Отображение (7.10) переводит радиальные отрезки $\{\rho \exp(i\theta_0), \rho \in [0, R], \theta_0 = \text{const}\}$ в касательные лучи $x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 = r_0$ к окружности $x^2 + y^2 = r_0^2$ (см. рис. 7.2, б). Однако, поскольку

$$x^2 + y^2 = r_0^2 + \left(\frac{ml_0}{k\rho}\right)^2 \geq r_0^2 + \left(\frac{ml_0}{kR}\right)^2 > r_0^2,$$

то все семейство касательных при $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ замечает внешность круга $x^2 + y^2 \leq r_0^2 + \left(\frac{ml_0}{kR}\right)^2$, дистанцируясь от кривой фокусировки $x^2 + y^2 = r_0^2$. Следовательно, никакая точка $(\xi, \eta) \in \Omega$ не имеет образа на окружности L (т.е. окружность лежит в области геометрической тени). Таким образом, решение (7.10) не может быть получено методом стационарной фазы. Решения такого рода в оптике называют волновыми. Необходимо отметить, что кроме улучшенных количественных характеристик (см. рис. 7.4) волновые решения (7.10) порождают более устойчивые поля при экспериментальной реализации. Например, при замене исходного лазерного пучка с $A(\xi, \eta) = e^{-\xi^2 - \eta^2}$ на $A(\xi, \eta) = \xi e^{-\xi^2 - \eta^2}$ получаемая в результате фокусировки фазовым элементом (7.10) кривая сохраняет свою односвязность, в отличие от своего геометро-оптического аналога.

Существенное отличие волновых решений задачи от чисто геометро-оптических (лучевых, полученных методом стационарной фазы) можно также проиллюстрировать следующим простым, но наглядным рассуждением. Предположим, что тем или иным путем получено некое лучевое решение $\phi(x, y)$ задачи фокусировки в кривую (пусть, замкнутую). Каким будет решение задачи фокусировки в подобную кривую, но увеличенную, скажем, в N раз? Геометро-оптический ответ на этот вопрос будет следующим: $\phi_N(x, y) = \frac{k(x^2 + y^2)}{2l}(N - 1) + N\phi(x, y)$. С другой стороны, совершенно очевидно, что это не так: даже простое увеличение аберраций (например, астигматизма) приводит к качественному изменению распределения интенсивности в фокусе. Существенным достоинством решений, полученных с использованием лучевого приближения, является их регулярный зонированный микро-рельеф [81]. Это снижает требования к технологии, используемой для изготовления дифракционных фазовых элементов.

Альтернативой геометрико-оптическому (лучевому) приближению являются чисто итерационные алгоритмы, дающие более точные решения. Однако итерационные алгоритмы также имеют принципиальные недостатки. Во-первых, эффективное восстановление входной фазовой функции из исходно случайной существенно зависит от того, насколько точно задается выходное распределение интенсивности в алгоритмах, разработанных в [81] и их модификациях. Существенно, что на выходе задается реальное распределение интенсивности, тогда как в задачах фокусировки оно, конечно, не известно. Это приводит к тому, что результат такого синтеза не может быть однозначным и оптимальным, достигается лишь локальный минимум функционала критерия или целевой функции [81]. Очевидно, что взяв иное исходное случайное фазовое распределение, получим и другое решение задачи. То же справедливо и для выходного распределения интенсивности. Выбор параметров случайной фазовой функции на входе (например, радиуса корреляции) также является весьма непростой задачей.

С другой стороны, решения, полученные итерационными алгоритмами, дают нерегулярный микрорельеф, причем изменение фазы в нем происходит в диапазоне $[0, 2\pi)$. Таким образом, выбор того или иного конечного числа градаций фазы приводит при этом подходе к качественному изменению топологии элемента, что не может не сказаться на эффективности его работы. Рассеяние таких элементов вследствие их квазирегулярности также сравнительно велико [81].

В связи с вышесказанным, решения, полученные методом стационарной фазы, для учета волновых свойств светового поля обычно модифицируются посредством тех или иных итеративных процедур, например, методом Герчберга–Сэкстона [82] (см. рис. 7.5). Следует отметить, что результативность такого подхода существенно зависит от начального приближения, получаемого, как уже отмечалось, методом стационарной фазы. Однако, как показывает пример с фокусировкой в окружность, решения задачи фокусировки, имеющие фазовые сингулярности, не могут быть получены методом стационарной фазы.

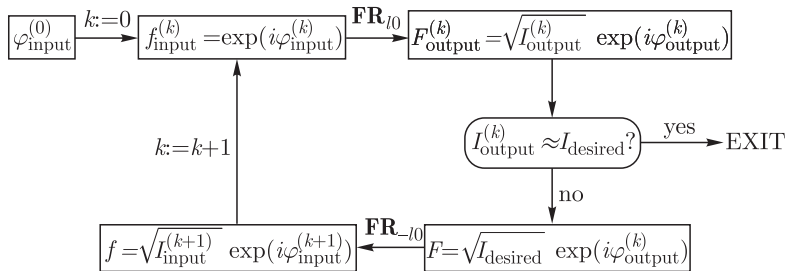


Рис. 7.5. Блок-схема итеративного алгоритма Герчберга–Сэкстона. Перед началом итераций необходимо задать начальное распределение фазы на входе $\phi_{input}^{(0)}$ и желаемое распределение интенсивности на выходе $I_{desired}$

Спиральные пучки, в силу своей структурной устойчивости, всегда являются амплитудно-фазовыми, но не чисто фазовыми световыми полями. В связи с этим внрезонантные методы синтеза световых полей как преобразование некоторого исходного поля посредством амплитудно-фазовых оптических элементов неизбежно связаны с потерей существенной доли энергии преобразованного поля. Это делает такие методы неоптимальными для прикладных задач. С другой стороны, структурная устойчивость поля при распространении и фокусировке не всегда является необходимой: вполне достаточно добиться эффективного преобразования исходного светового поля в поле с заданным распределением интенсивности в некоторой плоскости. Поэтому естественна постановка задачи: «обменять» структурную устойчивость спирального пучка на возможность формирования заданного распределения интенсивности в определенной плоскости чисто фазовым оптическим элементом.

Этот факт явился отправной точкой разработки метода синтеза фазовых элементов для фокусировки в кривые, который основан на фазовой структуре соответствующих спиральных пучков, естественно содержащих фазовые сингулярности, как начального приближения. При этом численные эксперименты показали весьма быструю сходимость метода. На рис. 7.6, 7.7 показаны два примера фазовых элементов, найденных с использованием фаз соответствующих спиральных пучков и метода Герчберга–Сэкстона.

Применение спиральных пучков для построения чисто фазовых элементов для фокусировки излучения в кривые и области предопределенной формы оказалось крайне полезным инструментом. Последующие компьютерные и оптические эксперименты показали, что небольшой модификацией алгоритма качество получаемых распределений интенсивности может быть существенно улучшено [83, 84]. На нынешнем этапе исследований в нашей лаборатории получены почти однородные распределения интенсивности в выходной плоскости (неоднородность не более 5%), причем теоретически доля энергии, сосредоточенной в окрестности области фокусировки, достигает 85–90%. В качестве

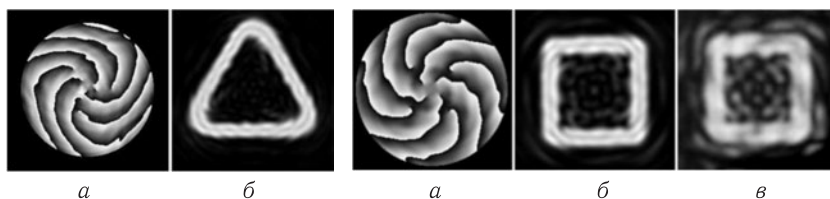


Рис. 7.6. Фаза (а) исходного пучка и интенсивность (б) пучка в области фокусировки, найденные с помощью алгоритма Герчберга–Сэкстона

Рис. 7.7. Фаза (а) исходного пучка и интенсивность (б — теория, в — эксперимент) пучка в области фокусировки, найденные с помощью алгоритма Герчберга–Сэкстона

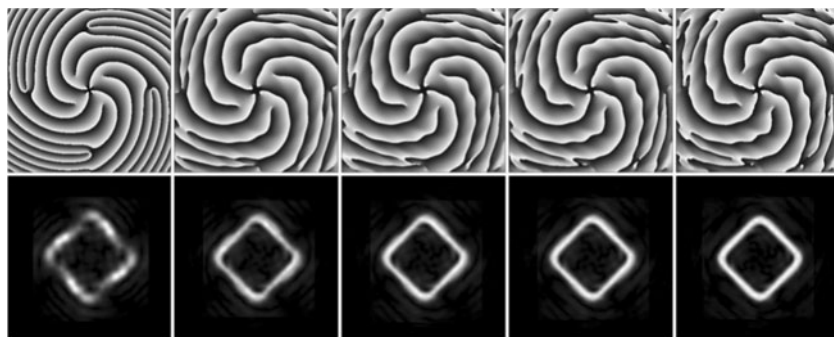


Рис. 7.8. Результаты пяти итераций алгоритма Герчберга–Сэкстона по созданию фазового элемента, фокусирующего гауссов пучок в границу квадрата

кривых для построения фазовых элементов выбирались отрезок, спираль Архимеда, границы правильного треугольника и квадрата, кривая в форме снежинки. На рис. 7.8, 7.9 приведены улучшенные фазовые элементы и результаты их фокусировки.

Первоначально эксперименты по формированию полей с заданным распределением интенсивности были проведены на слоях бихромированной желатины. Изготовление фазовых элементов осуществлялось следующим образом: 1) фотошаблоны для изготовления фазовых элементов фотографировались на высокоразрешающую фотопленку с экрана плоского монитора и проявлялись в линейном диапазоне; 2) при помощи фотошаблонов контактным методом изготавливались фазовые элементы на слоях бихромированной желатины. Изготовленные элементы освещались гауссовым пучком необходимой ширины. Интенсивность поля, сформированного в дальней зоне дифракции, регистриро-

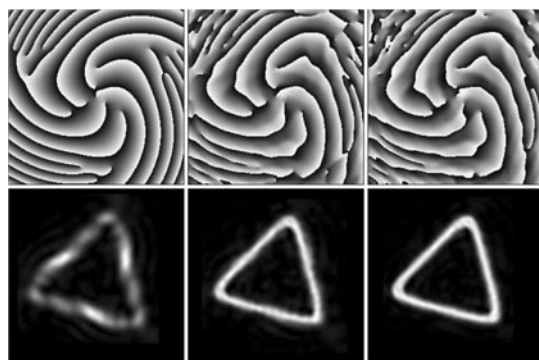


Рис. 7.9. Результаты 1-й, 4-й и 10-й итераций алгоритма Герчберга–Сэкстона по созданию фазового элемента, фокусирующего гауссов пучок в границу правильного треугольника

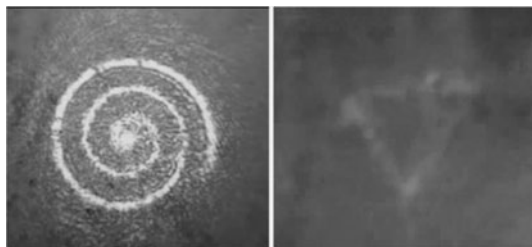


Рис. 7.10. Частицы, захваченные и удерживаемые на спирали Архимеда и границе правильного треугольника посредством облучения их гауссовым пучком с соответствующими фазовыми элементами

валась на матрицу цифрового фотоаппарата. В последующих экспериментах использовался пространственный модулятор света с разрешением 512×512 пикселей. Примеры полученных полей приведены на рис. 7.11. Видно, что в обоих случаях экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими. Энергетическая эффективность в эксперименте составила 55–60 %.

Полученные световые поля с профилем интенсивности в форме границы правильного треугольника и границы квадрата нашли применение в задачах оптических манипуляций микрочастицами размером 5–10 мкм [85, 86]. Ненулевая плотность углового момента таких полей позволяет осуществлять, в частности, перемещения по заданным

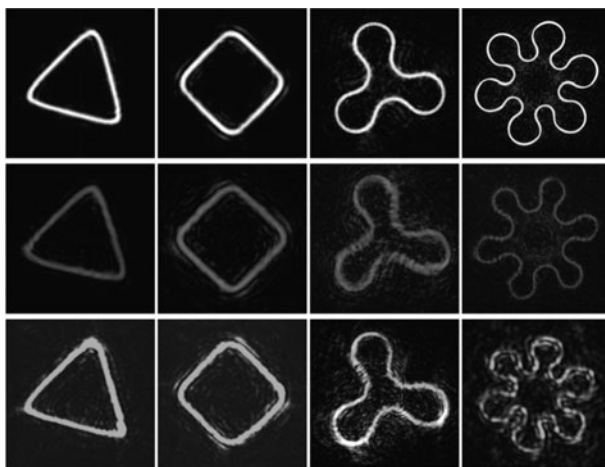


Рис. 7.11. Световые поля в форме плоских кривых, созданные при помощи фазовых элементов: теоретические распределения интенсивности (верхний ряд), результаты экспериментального формирования полей при помощи фазовых элементов, изготовленных на слоях бихромированной желатины (средний ряд) и при помощи пространственного модулятора света (нижний ряд)

траекториям с размерами области движения 50–200 мкм. На рис. 7.10 показаны примеры захвата и удержания частиц на спирали Архимеда и границе правильного треугольника, посредством облучения их гауссовым пучком с соответствующими фазовыми элементами.

7.2. Задача фокусировки лазерного излучения в область заданной формы

Конечно, хотелось бы перенести метод формирования световых полей в виде кривых на задачу фокусировки в область заданной формы. Однако, уже на стадии постановки задачи становятся очевидными принципиальные различия.

Главное из них в том, что не существует спиральных пучков в форме области. Из общих соображений это довольно понятно: если кривая «организуется» расположением нулей по обе ее стороны, то для области это не так потому, что однородность интенсивности внутри области подразумевает, конечно, отсутствие нулей внутри. С другой стороны, влияние нуля существенно только в его окрестности, и формировать поле внутри области посредством только простых нулей вне ее становится неэффективным. Таким образом, задача фокусировки в область требует, видимо, иного подхода.

Из результатов исследования астигматических преобразований гауссовых пучков, конкретно, с использованием обобщенных пучков ЭЛГ, удалось получить следующий результат [84].

Пусть $f(x, y)$ — некоторое поле с конечной энергией. Тогда оно представимо в виде:

$$f(x, y) = \sum_{n,m} c_{n,m} \mathcal{H}_{n,m}(x, y) = \sum_{n,m} c_{n,m} i^m \mathcal{G}_{n,m}(x, y | 0).$$

Возникает вопрос: что представляет собой поле, описываемое разложением

$$F(x, y | \alpha) = \sum_{n,m} c_{n,m} i^m \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \alpha)?$$

Иными словами, как трансформируется поле $f(x, y)$ при замене базиса разложения? Оказывается, результат будет следующим:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2} \middle| \alpha\right) &= \\ &= \frac{1}{2\pi|\sin\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{i(y\eta - x\xi)}{\sin\alpha} + \frac{i\operatorname{ctg}\alpha}{2}(y^2 + \eta^2 - x^2 - \xi^2)\right) \times \\ &\quad \times f\left(\frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi d\eta = \\ &= \mathcal{F}_{-\alpha}(x) \mathcal{F}_{\alpha}(y) \left[f\left(\frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) \right], \quad (7.11) \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{F}_\theta(t)[f(\tau)] = \frac{\exp(\frac{1}{2}i\theta - \frac{1}{4}\pi i \operatorname{sgn} \sin \theta)}{\sqrt{2\pi}|\sin \theta|} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{it\tau}{\sin \theta} + \frac{i \operatorname{ctg} \theta}{2}(t^2 + \tau^2)\right) f(\tau) d\tau$$

есть одномерное дробное преобразование Фурье [87].

Для поля $f(x, y)$, являющегося сверткой гауссовой функции с областью произвольной формы Ω ,

$$f(x, y) = \iint_{\Omega} e^{-(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2} d\xi d\eta = e^{-x^2 - y^2} * \chi_{\Omega}(x, y), \quad (7.12)$$

соответствующая функция будет следующей:

$$F(x, y | \alpha) = \\ = e^{2ixy \operatorname{tg} \alpha} \iint_{\Omega} e^{-(x-\xi \cos \alpha)^2 - (y-\eta \cos \alpha)^2 - 2i(x-\xi \cos \alpha)(y-\eta \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha} d\xi d\eta = \\ = \frac{e^{2ixy \operatorname{tg} \alpha}}{\cos^2 \alpha} \left[e^{-x^2 - y^2 - 2ixy \operatorname{tg} \alpha} * \chi_{\Omega \cos \alpha}(x, y) \right],$$

и, в частности,

$$F(x, y | \pi/4) = 2e^{2ixy} \left[e^{-x^2 - y^2 - 2ixy} * \chi_{\Omega/\sqrt{2}}(x, y) \right]. \quad (7.13)$$

Данное поле имеет замечательное свойство: не являясь структурно устойчивым в зоне Френеля, оно, тем не менее, восстанавливает свою форму в дальней зоне, или в плоскости Фурье. Именно, для любой области Ω справедливо равенство:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi + y\eta)} F\left(\xi, \eta \left| \frac{\pi}{4} \right.\right) d\xi d\eta = \pi \overline{F}\left(\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \left| \frac{\pi}{4} \right.\right). \quad (7.14)$$

Соотношение (7.14) справедливо даже для более широкого класса полей: достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ была вещественной.

Это свойство и было положено в основу метода синтеза световых полей и, соответственно, фазовых элементов, формирующих распределение интенсивности в виде области заданной формы.

По аналогии с задачей фокусировки в кривую, за нулевое приближение распределения фазы в начальной плоскости выбиралось фазовое распределение соответствующего поля (7.13). В то же время за нулевое приближение интенсивности бралось распределение поля (7.14) в дальней зоне. Хотя для отдельных видов областей на данный момент получены неплохие результаты (примеры см. на рис. 7.12), проработка этой задачи значительно слабее соответствующей задачи для кривых.

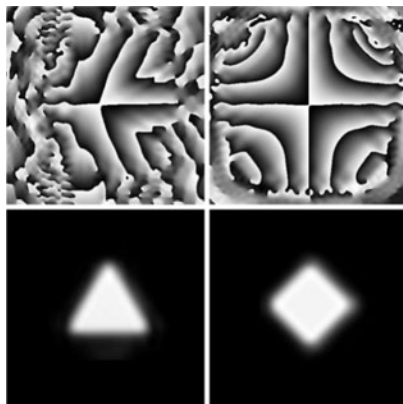


Рис. 7.12. Фазовые элементы (верхний ряд) и результаты фокусировки при освещении их гауссовым пучком

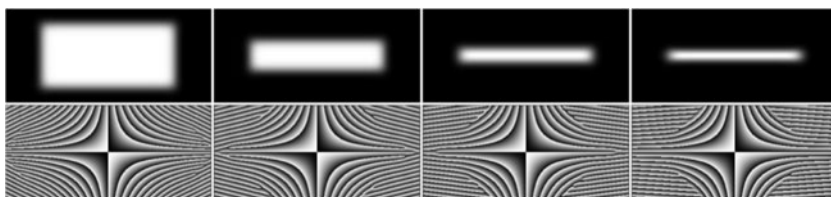


Рис. 7.13. Трансформация светового поля в форме прямоугольника в спиральный пучок в форме отрезка прямой линии

К настоящему времени не вполне понятна, например, связь между качеством синтезируемого фазового элемента и параметрами квантования для кривой, являющейся границей соответствующей области (а такая связь проявилась). Не решен вопрос и об оптимальном соотношении между гауссовым параметром и размером области. Кроме того, не для всех форм области удастся пока получить приемлемые решения. С другой стороны, существует все-таки некоторая внутренняя родственность первой и второй задач. Если взять область в форме прямоугольника $[-a, a] \times [-b, b]$, а затем уменьшать одну из сторон ($b \rightarrow 0$) при сохранении энергии поля, то в пределе из (7.13) получится известный спиральный пучок в виде отрезка (см. рис. 7.13):

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{e^{2ixy}}{b} \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b e^{-(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - 2i(x-\xi)(y-\eta)} d\eta =$$

$$= e^{-x^2 - y^2} \int_{-a}^a e^{-\xi^2 + 2\xi(x+iy)} d\xi.$$

Тем не менее, в целом задача фокусировки в область на данный момент весьма далека от завершения.

Заключение

Цель заключения — дать суммарный и сопоставительный анализ полученных новых результатов, а также формулировки некоторых нерешенных до конца проблем.

Обобщенные пучки Эрмита-Лагерра-Гаусса, найденные авторами при исследовании астигматических преобразований гауссовых пучков, образуют параметрическое семейство, в котором известные ранее пучки Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса являются частными представителями, соответствующими некоторым двум значениям параметра. Обобщение этих пучков как представителей более широкого параметрического семейства позволило развить матричную оптику гауссовых пучков для астигматических оптических систем общего вида и свести качественные изменения структуры пучков при астигматических воздействиях к количественным изменениям комплексных параметров.

Кроме того, астигматические преобразования гауссовых пучков позволили предложить новый подход к синтезу фазовых элементов для формирования световых полей в виде областей произвольной формы. Данная задача сейчас в стадии исследования и уровень ее решения пока далек от результатов, полученных для световых полей в виде кривых. Причиной этого, на наш взгляд, являются два взаимосвязанных обстоятельства: во-первых, область, в отличие от кривой, не является упорядоченным множеством. Во-вторых, световые поля в виде областей содержат фазовые сингулярности обоих знаков и не являются структурно устойчивыми в зоне Френеля. В связи с этим синтез соответствующих фазовых элементов осложняется рядом факторов: формой области, способом синтеза и т.п.

В параметрическом семействе пучков Эрмита-Лагерра-Гаусса только известные ранее пучки Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса соответствуют вещественным системам координат: декартовой и полярной, все остальные представители семейства непредставимы в таких системах. Но, как показано в [17, 88], существует еще одна вещественная система координат, эллиптическая, которая также порождает семейство ортогональных структурно устойчивых в зоне Френеля световых полей, т. н. пучков Айнса-Гаусса. Наличие вещественной системы координат роднит данное семейство с пучками Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса, однако, к сожалению, в отличие от пучков Эрмита-Лагерра-Гаусса, не удастся получить для них простое аналитическое представление, поскольку его построение требует нахождения корней полиномиальных уравнений. Таким образом, нет аналитических представлений для пучков такого типа и, как следствие, неясна их ценность для задач анализа и синтеза световых полей. Пучки Айнса-Гаусса структурно устойчивы в зоне Френеля, и из них с помощью астигматического преобразования можно построить соответствующее новое параметрическое семейство,

подобно тому как пучки Лагерра–Гаусса получаются из пучков Эрмита–Гаусса. Однако, в силу упомянутых причин и эти семейства пока не построены и их применимость для конкретных задач неясна.

Характерно, что существует сильное внешнее сходство между некоторыми пучками Эрмита–Лагерра–Гаусса и Айнса–Гаусса, однако установлено, что это все-таки объекты, имеющие различную природу и не совпадающие в деталях.

Сингулярной оптикой называют в последние годы область исследований, касающихся световых полей с дислокациями волнового фронта, или оптическими вихрями.

Оптические вихри — это нули комплексной амплитуды светового поля, где распределение фазы имеет особенности. Они носят название дислокаций волнового фронта. Первоначально этот термин был введен и рассмотрен из геометрических соображений в работе Дж. Ф. Ная и М. Берри [89], где было обращено внимание на принципиальное различие между нулями комплексной амплитуды волнового поля в одномерном и двумерном случаях. Смысл этого различия состоит в следующем. Если для одномерного поля геометрическое множество нулей вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды поля — это набор точек, то для двумерного поля нули вещественной и мнимой частей — это линии. В связи с этим поведение изолированных нулей амплитуды становится различным при малых изменениях (шевелениях) поля: в одномерном случае нулевые точки вещественной и мнимой частей легко «теряют» друг друга, и нуль амплитуды пропадает; в двумерном поле нулевые линии вещественной и мнимой частей деформируются, но точки их пересечения, т. е. изолированные нули амплитуды, остаются устойчивыми.

Из отечественных авторов внимание этим оптическим объектам было уделено Б. Я. Зельдовичем с соавторами [90, 91]. В их работах изучались плотность и знак дислокаций случайного светового поля (спекл-поля) и, в частности, было показано, что в спекл-поле количество дислокаций обоих знаков примерно одинаково, а плотность дислокаций составляет одну дислокацию на спекл (т. е. характерный средний размер неоднородности поля).

Исследования световых полей с фазовыми сингулярностями проводятся научными группами М. С. Соскина, А. В. Воляра, А. Я. Бекшаева. Ими исследованы топологические свойства таких полей [92–94], способы их синтеза с помощью специфических голограмм [95], величина и структура углового момента пучков с фазовыми сингулярностями [96, 97], распространение вихревых пучков в маломодовых волокнах [98].

Поля с фазовыми сингулярностями формируются и наблюдаются как в линейных, так и нелинейных оптических средах, поэтому потребность в адекватных теоретических и экспериментальных подходах для исследования полей с оптическими вихрями является актуальной задачей.

Конечно, с формальной точки зрения любое когерентное световое поле можно представить в виде суперпозиции известных пучков Эрмита–Гаусса или Лагерра–Гаусса, однако такой подход оказывается неоптимальным для анализа и синтеза полей с фазовыми сингулярностями.

Вихревые световые поля, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба и вращения при распространении, или спиральные пучки, которым посвящен раздел данной книги, являясь своеобразными «вихревыми модами» в классе полей с фазовыми сингулярностями, заслуживают отдельного внимания как объект когерентной оптики. На наш взгляд, это обусловлено следующими основными причинами. Во-первых, обладая весьма разнообразной формой распределения интенсивности, эти пучки тем не менее описываются явными аналитическими выражениями, что делает их эффективным инструментом исследования закономерностей формирования и преобразования световых полей с фазовыми сингулярностями общего вида. Во-вторых, имеется прямой аналог спиральным пучкам в квантовой механике: волновые функции заряженной частицы в однородном магнитном поле, а законы преобразования спиральных пучков имеют свое представление в теории когерентных состояний. Вполне возможно, эти аналогии будут взаимно полезны и для квантовой механики, и для оптики. Наконец, в-третьих, возможность гибкого изменения распределений интенсивности спиральных пучков с сохранением их структурной устойчивости при распространении и фокусировке представляет интерес для лазерных технологий, создания специфических атомных ловушек, а ненулевой угловой момент этих пучков дает новые возможности для манипулирования микрообъектами.

Некоторые существенные вопросы оптики спиральных пучков не нашли должного отражения в данной книге. В частности, неполно описаны пучки в форме кривых с самопересечениями. Случай таких пучков оказался более сложным и, как показано выше, для них и при выполнении условия квантования (6.15) нули амплитуды могут находиться на порождающей кривой. Пучки для кривых с самопересечениями являются предметом наших текущих исследований.

В главе 6 показано, что скалярное произведение комплексных амплитуд спиральных пучков с точностью до постоянного множителя совпадает со скалярным произведением соответствующих одномерных кодировочных функций. С другой стороны, существуют большие классы взаимно ортогональных спиральных пучков. Отсюда следует, что такие кодировочные функции могут быть использованы как ядра специфических вейвлет-преобразований для обработки сигналов [99, 100]. Свойства этих вейвлет-преобразований также являются в настоящее время предметом наших исследований.

Список литературы

1. М.А. Леонтович. // Известия АН СССР (серия физическая). 1944. Т. 8. № 1. С. 16–22.
2. М.А. Леонтович, В.А. Фок. Исследования по распространению радиоволн // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 7. С. 557–573.
3. Физическая энциклопедия (Т. 3. С. 528). — М.: Изд-во «Большая Российская энциклопедия», 1992. 672 с.
4. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. — М.: Наука, 1990. 432 с.
5. E. Abramochkin, V. Volostnikov. Spiral-type beams // Optics Communications. 1993. V. 102. N 3-4. P. 336–350.
6. Е. Титчмарш. Теория функций. — М.: Наука, 1980. 464 с.
7. А.И. Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978. 528 с.
8. Е.Г. Абрамочкин. Исследование обратных задач и автомодельных решений уравнения Шредингера: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Самара: Изд-во СамГПУ, 1996. 100 с.
9. Б.Я. Левин. Распределение нулей целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
10. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Физматлит, 2004. 800 с.
11. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Том 2. — М.: Наука, 1974. 296 с.
12. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1962. 500 с.
13. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды (в 3-х тт.). Том 2. Специальные функции. — М.: Физматлит, 2003. 664 с.
14. Ю.А. Брычков. Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы. — М.: Физматлит, 2006. 512 с.
15. Д. Маркузе. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974. 576 с.
16. А.П. Хапалюк. Открытые оптические резонаторы и пространственная структура лазерного излучения / Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Минск: Изд-во Белорусского ун-та, 1987. 379 с.
17. C.P. Boyer, E.G. Kalnins, W. Miller. Lie theory and separation of variables. 7. The harmonic oscillator in elliptic coordinates and Ince polynomials // J. Math. Physics. 1975. V. 16. N 3. P. 512–517.
18. А. Яриу. Квантовая электроника. — М.: Советское радио, 1980. 488 с.
19. J. Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // J. Opt. Soc. Am. A. 1987. V. 4. N 4. P. 651–654.
20. A. Wünsche. Generalized Gaussian beam solutions of paraxial optics and their connection to a hidden symmetry // J. Opt. Soc. Am. A. 1989. V. 6. N 9. P. 1320–1329.
21. E. Abramochkin, V. Volostnikov. Beam transformations and nontransformed beams // Optics Communications. 1991. V. 83. N 1-2. P. 123–135.
22. Е.Г. Абрамочкин. Функции Эрмита–Лагерра–Гаусса // Вестник Самарского гос. ун-та (естественнонауч. серия). 2001. № 4. С. 19–41.
23. E. Abramochkin, V. Volostnikov. Generalized Gaussian beams // J. Optics A: Pure and Applied Optics. 2004. V. 6. N 5. P. S157–S161.

24. *M.J. Bastiaans, T. Alieva.* Bi-orthonormal sets of Gaussian-type modes // J. Optics A: Math. Gen. 2005. V. 38. N 46. P. 9931-9939.
25. *M.J. Bastiaans, T. Alieva.* Generating function for Hermite-Gaussian modes propagating through first-order optical systems // J. Optics A: Math. Gen. 2005. V. 38. N 6. P. L73-L78.
26. *M.J. Bastiaans, T. Alieva.* Mode mapping in paraxial lossless optics // Optics Letters. 2005. V. 30. N 12. P. 1461-1463.
27. *M.J. Bastiaans, T. Alieva.* Propagation law for the generating function of Hermite-Gaussian type modes in first-order optical systems // Optics Express. 2005. V. 13. N 4. P. 1107-1112.
28. *M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega.* Ince-Gaussian beams // Optics Letters. 2004. V. 29. N 2. P. 144-146.
29. *M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega.* Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators // J. Opt. Soc. Am. A. 2004. V. 21. N 5. P. 873-880.
30. *M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega.* Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams // Optics Letters. 2005. V. 30. N 16. P. 2155-2157.
31. *Е.Г. Абрамочкин, Е.В. Разуева, В.Г. Волостников.* Обобщенные гауссовы пучки и их преобразование в оптических системах с астигматизмом // Вестник Самарского гос. ун-та (естественнонауч. серия). 2006. № 2. С. 103-121.
32. *E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov.* Gaussian beams: new aspects and applications // Proc. LFNМ'2006 (Kharkov, 29.06-1.07.2006). P. 267-274.
33. *В.Г. Волостников.* Методы анализа и синтеза когерентных световых пучков: исследование фазовой проблемы и развитие оптики гауссовых пучков: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1997. 193 с.
34. *Р. Беллман.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976. 352 с.
35. *В.П. Суетин.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Физматлит, 2007. 480 с.
36. *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев.* Интегралы и ряды (в 3-х тт.). Том 1. Элементарные функции. — М.: Физматлит, 2003. 632 с.
37. *Ю.А. Ананьев.* Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения. — М.: Наука, 1979. 328 с.
38. *Ю.А. Ананьев.* Оптические резонаторы и лазерные пучки. — М.: Наука, 1989. 264 с.
39. *А. Джеррард, Дж.М. Берч.* Введение в матричную оптику. — М.: Мир, 1978. 344 с.
40. *H. Kogelnik and T. Li.* Laser beams and resonators // Applied Optics. 1966. V. 5, N 10. P. 1550-1567.
41. *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.* Основы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2006. 572 с.
42. *В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов.* Прикладные методы в теории колебаний. — М.: Наука, 1988. 326 с.
43. *С. Хелгасон.* Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983. 150 с.
44. *Д.А. Варшавович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория углового момента. — Л.: Наука, 1975. 534 с.
45. *Дж. Джексон.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965. 703 с.

46. *L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes // *Physical Review A.* 1992. V. 45. N 11. P. 8185–8189.
47. *M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vasnetsov, J. Malos, N.R. Heckenberg.* Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices // *Physical Review A.* 1997. V. 56. P. 4064–4075.
48. *E. Abramochkin, V. Volostnikov.* Relationship between 2D intensity and phase in a Fresnel diffraction zone // *Optics Communications.* 1989. V. 74. N 3–4. P. 144–148.
49. *В.Г. Волостников.* Фазовая проблема в оптике // Препринт ФИАН № 93. М.: ФИАН, 1990. 60 с.
V.G. Volostnikov. Phase problem in optics // *J. Sov. Laser Research.* 1990. V. 11. N 6. P. 601–626.
50. *Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников.* Вращающиеся световые поля и сингулярная оптика // *Вестник Самарского гос. ун-та (естественнонауч. серия).* 2002. Спец. выпуск. С. 71–114.
51. *Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников.* Спиральные пучки света // *Успехи физических наук.* 2004. Т. 174. № 12. С. 1274–1300.
52. *J.B. Murphy.* Phase space conservation and selection rules for astigmatic mode converters // *Optics Communications.* 1999. V. 165. N 1. P. 11–18.
53. *А.М. Гончаренко.* Гауссовы пучки света. — Минск, Наука и техника, 1977. 144 с.
54. *А.С. Давыдов.* Квантовая механика. — М.: Физматгиз, 1963. 748 с.
55. *Д.И. Блохинцев.* Основы квантовой механики. — М.: Наука, 1976. 664 с.
56. *G. Indebetouw.* Optical vortices and their propagation // *J. Modern Optics.* 1993. V. 40. P. 73–87.
57. *А.О. Гельфонд.* Решение уравнений в целых числах. — М.: Наука, 1978. 63 с.
58. *E. Abramochkin, V. Volostnikov.* Spiral-type beams: optical and quantum aspects // *Optics Communications,* 1996. V. 125. N 4–6. P. 302–323.
59. *Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников.* Спиральные пучки света — новый объект когерентной оптики // *Известия Самарского науч. центра РАН.* 1999. № 2. С. 247–254.
60. *E. Abramochkin, V. Volostnikov.* Light beams with phase singularities: some aspects of analysis and synthesis // *Proc. SPIE.* 2001. V. 4403. P. 44–49.
61. *V. Volostnikov, E. Abramochkin.* Spiral laser beams — a new object of coherent optics // *Proc. SPIE.* 2001. V. 4353. P. 237–241.
62. *Л. де Бройль.* Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. — М.: Мир, 1986.
63. *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков.* Основные состояния двумерного электрона в периодическом магнитном поле // *ЖЭТФ.* 1980. Т. 79. С. 1006–1016.
64. *В.А. Гейлер.* Двумерный оператор Шредингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса // *Алгебра и анализ.* 1991. Т. 3. Вып. 3. С. 2–48.
65. *E. Abramochkin, N. Losevsky, V. Volostnikov.* Generation of spiral-type laser beams // *Optics Communications.* 1997. V. 141. N 1–2. P. 59–64.
66. *М.В. Федорюк.* Асимптотика: интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. 544 с.

67. Д.Б. Фукс. Лента Мёбиуса. Вариации на старую тему // Квант. 1979. № 1. С. 2–9.
68. Е.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа. Том 2. — М.: Наука, 1963. 516 с.
69. В.И. Арнольд. Математические методы классической механики. — М.: Едиториал УРСС, 2003. 416 с.
70. А.В. Гончарский, В.В. Попов, В.В. Степанов. Введение в компьютерную оптику. — М.: Изд-во МГУ, 1991. 310 с.
71. M.R. Taghizadeh, P. Blair, B. Layet, I.M. Barton, A.J. Waddie, N. Ross. Design and fabrication of diffractive optical elements // Microelectronic Engineering. 1997. V. 37. P. 219–242.
72. F. Wyrowski, O. Bryngdahl. Digital holography as part of diffractive optics // Reports Prog. Phys. 1991. P. 1481–1571.
73. М.А. Воронцов, А.Н. Матвеев, В.П. Сивоконь. К расчету фокусаторов лазерного излучения в дифракционном приближении // В сб. «Компьютерная оптика». — Самара: изд-во Самарского аэрокосмического ун-та. Вып. 1. 1987. С. 74–78.
74. А.В. Гончарский, В.А. Данилов, В.В. Попов и др. Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273. № 3. С. 605–608.
75. А.В. Гончарский, И.Н. Сисакян, В.В. Степанов. О разрешимости некоторых обратных задач фокусировки лазерного излучения // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279. № 1. С. 68–71.
76. М.А. Голуб, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов. Дифракционный расчет оптического элемента, фокусирующего в кольцо // Автометрия. 1987. № 6. С. 8–15.
77. Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников, В.В. Котляр, А.Н. Малов. Решение фазовой проблемы в оптике в приближении Френеля // Крат. сообщ. по физике. 1986. № 7. С. 16–18.
78. Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников, В.В. Котляр, А.Н. Малов. Восстановление фазы двумерного светового поля. Дифференциальный подход // Крат. сообщ. по физике. 1987. № 3. С. 7–9.
79. E. Abramochkin, V. Volostnikov. Two-dimensional phase problem: differential approach // Optics Communications. 1989. V. 74. N 3–4. P. 139–143.
80. Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. Фазовая проблема в оптике и синтез оптических полей // В сб. «Компьютерная оптика». — Самара: изд-во Самарского аэрокосмического ун-та. 1992. Вып. 10–11. С. 95–100.
81. Дифракционная компьютерная оптика (под ред. В.А. Сойфера). — М.: Физматлит, 2007. 736 с.
82. R. W. Gerchberg, W.O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures // Optik. 1972. V. 75. N 2. P. 237–246.
83. E.G. Abramochkin, E.V. Razueva, V.G. Volostnikov. Application of spiral laser beams for beam shaping problem // Proc. LFNM'2006 (Kharkov, 29.06–1.07.2006). P. 275–278.
84. E.G. Abramochkin, E.V. Razueva, V.G. Volostnikov. Fourier invariant singular wavefields and beam shaping problem // Proc. LFNM'2006 (Kharkov, 29.06–1.07.2006). P. 370–373.

85. *E.G. Abramochkin, S.P. Kotova, N.N. Losevsky, V.G. Volostnikov, V.V. Yakutkin.* Transformation of laser diode radiation to complex structure modes in build-up beam rotator interferometer // *Proc. SPIE.* 2005. V.5851. P. 408–414.
86. *E.G. Abramochkin, S.P. Kotova, A.V. Korobtsov, N.N. Losevsky, A.M. Mayorova, M.A. Rakhmatulin, V.G. Volostnikov.* Microobject manipulations using laser beams with nonzero orbital angular momentum // *Laser Physics.* 2006. V. 16. N 5. P. 842–848.
87. *V. Namias.* The fractional order Fourier transform and its applications to quantum mechanics // *J. Inst. Math. Appl.* 1980. V. 25. P. 241–267.
88. *У. Миллер-мл.* Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981. 343 с.
89. *M.V. Berry, J.F. Nye.* Dislocations in wave trains // *Proc. Royal Soc. London, series A.* 1974. V. 336. P. 165–190.
90. *Н.Б. Баранова, Б.Я. Зельдович.* Дислокации поверхностей волнового фронта и нули амплитуды // *ЖЭТФ.* 1981. Т. 80. С. 1789–1797.
91. *Н.Б. Баранова, Б.Я. Зельдович.* Исследование плотности дислокаций волнового фронта световых полей со спекл-структурой // *ЖЭТФ.* 1982. Т. 83. С. 1702–1710.
92. *В.Ю. Баженов, М.В. Васнецов, М.С. Соскин.* Лазерные пучки с винтовыми дислокациями волнового фронта // *Письма в ЖЭТФ.* 1990. Т. 52. N 8. С. 1037–1039.
93. *V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov.* Screw dislocations in light wavefronts // *J. Mod. Optics.* 1992. V. 39. P. 985–990.
94. *M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vasnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg.* Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices // *Phys. Review A.* 1997. V. 56. N 5. P. 4064–4075.
95. *A.V. Ilyenkov, A.I. Khiznyak, L.V. Kreminskaya, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov.* Birth and evolution of wavefront dislocations in a laser beam passed through photorefractive LiNbO_3 crystal // *Proc. SPIE.* V. 2647. P. 43–47.
96. *А.Я. Бекшаев, М.В. Васнецов, В.Г. Денисенко, М.С. Соскин.* Преобразование орбитального углового момента пучка с оптическим вихрем в астигматической оптической системе // *Письма в ЖЭТФ.* 2002. Т. 75. № 3. С. 155–158.
97. *A. Bekshaev, A. Popov.* Measurement of the orbital angular momentum of an optical beam with the help of space-angle intensity moments // *Proc. SPIE.* 2002. V. 4607. P. 90–98.
98. *К.Н. Алексеев, А.В. Воляр, Т.А. Фадеева.* Спин-орбитальное взаимодействие и эволюция оптических вихрей в возмущенных слабо направляющих волокнах // *Оптика и спектроскопия.* 2002. Т. 93, № 4. С. 639–649.
99. *Н.М. Астафьева.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук.* 1996. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
100. *И.М. Дрёмин, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло.* Вэйвлеты и их использование // *Успехи физических наук.* 2001. Т. 171. № 5. С. 465–501.